Probabilidad y Estadística

6ta Escuela de Invierno Ingemat para Estudiantes de Enseñanza Media

Héctor Olivero Q.
hector.olivero@uv.cl

Instituto de Ingeniería Matemática - ingemat.uv.cl

20 de junio de 2025

La incertidumbre y la probabilidad

- ¿Cómo estará el clima mañana?

La incertidumbre y la probabilidad

- ¿Cómo estará el clima mañana?
- ¿Va a subir el precio de una acción en la bolsa?

La incertidumbre y la probabilidad

- ¿Cómo estará el clima mañana?
- ¿Va a subir el precio de una acción en la bolsa?
- ¿Es posible predecir el movimiento de una partícula subatómica?

La incertidumbre y la probabilidad

- ¿Cómo estará el clima mañana?
- ¿Va a subir el precio de una acción en la bolsa?
- ¿Es posible predecir el movimiento de una partícula subatómica?
- Si detenemos un juego de cartas a la mitad ¿quién debería llevarse el dinero de las apuestas?

Noción clásica de probabilidad

Consideremos un experimento con $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ resultados posibles, todos de ellos igualmente factibles. Dado un subconjunto $R \subset \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$, diremos que la probabilidad de R, que denotaremos por $\mathbb{P}(R)$, se calcula como:

$$\mathbb{P}(R) = \frac{\#\{R\}}{\#\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}}.$$

Ejemplo: Lanzamiento de monedas

Ejemplo: Lanzamiento de dados

Ejemplo: Entendiendo el poquer

Clasificación de las manos [editar]

Top	Nombre en español	*Nombre en inglés*	Descripción	Ejemplo	Combinaciones Posibles	Probabilidad
1	**Escalera real** o **flor imperial**	*Royal flush*	Cinco cartas seguidas del mismo palo del 10 al as.	A♣ K♣ Q♣ J♣ 10♣	4 de 2 598 960	0.000 154 %
2	**Escalera de color**	*Straight flush*	Cinco cartas consecutivas del mismo palo.	7♦ 8♦ 9♦ 10♦ J♦	36 de 2 598 960	0.001 385 %
3	**Póker**	*Four of a kind o Quad*	Cuatro cartas iguales en su valor.	9♥ 9♠ 9♣ 9♦ 3♦	624 de 2 598 960	0.024 %
4	**Full**	*Full House*	Tres cartas iguales en su valor (trío), más otras dos iguales en su valor (pareja).	6♦ 6♠ 6♥ 3♣ 3♠	3744 de 2 598 960	0.144 057 6 %
5	**Color**	*Flush*	Cinco cartas del mismo palo, sin ser consecutivas.	2♥ 7♥ J♥ A♥ 4♥	5108 de 2 598 960	0.1965 %
6	**Escalera**	*Straight*	Cinco cartas consecutivas sin importar el palo.	3♦ 4♣ 5♦ 6♠ 7♥	10 200 de 2 598 960	0.3924 %
7	**Trío**	*Three of a kind* o *Set*	Tres cartas iguales de valor.	8♥ 8♠ 8♣ 2♣ 10♦	54 912 de 2 598 960	2.1113 %
8	**Doble pareja**	*Two pair* o *Pocket*	Dos pares de cartas del mismo número (par y par).	Q♦ Q♠ 5♥ 2♣ 5♠	123 552 de 2 598 960	4.759 %
9	**Pareja**	*One pair*	Dos cartas iguales de número (y tres diferentes).	K♣ K♦ 7♣ 2♠ J♥	1 098 240 de 2 598 960	42.257 %
10	**Carta alta**	*High card*	Gana quien tiene la carta más alta de todas.	Q♦ 7♠ 5♥ 3♣ 10♠	1 302 540 de 2 598 960	50.1177 %

Figura: Fuente: Wikipedia

51. En una encuesta, las personas indicaron su preferencia de estilo musical, eligiendo solo una de entre las opciones rock, pop, rap y reguetón, obteniéndose las respuestas que se presentan en la siguiente tabla:

Estilo Musical	Frecuencia
Rock	7
Pop	4
Rap	3
Reguetón	6

Si se selecciona al azar a una persona de las encuestadas, ¿cuál es la probabilidad de que prefiera el rock?

PAES M1-2024

52. En la tabla adjunta se presentan los resultados obtenidos al consultar a un grupo de personas sobre la preferencia de estudiar una de las cuatro carreras profesionales propuestas, tal que cada persona escogió solo una carrera.

Carrera profesional	Frecuencia
Ingeniería civil	900
Periodismo	300
Medicina	700
Enfermería	400

Si se escoge a una de estas personas al azar, ¿cuál de las siguientes expresiones permite determinar la probabilidad de que esta prefiera una carrera del área de la salud?

A) $\dfrac{\text{Frecuencia medicina} + \text{Frecuencia enfermería}}{1100}$

B) $\dfrac{\text{Frecuencia medicina} + \text{Frecuencia enfermería}}{2300}$

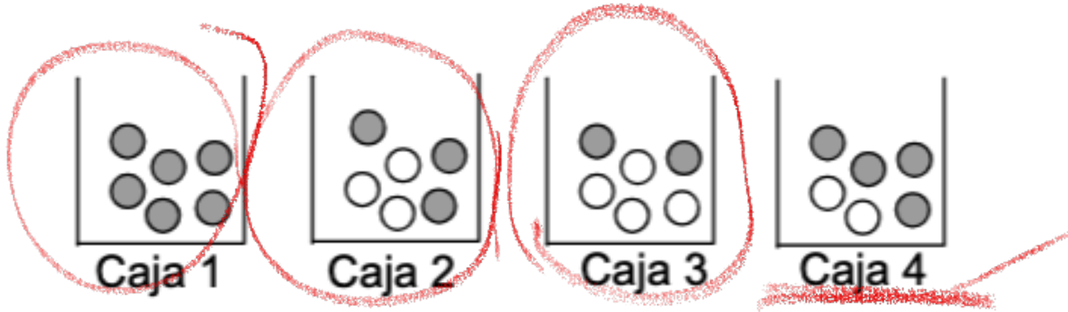
C) $1 - \dfrac{\text{Frecuencia medicina} + \text{Frecuencia enfermería}}{2300}$

D) $1 - \dfrac{\text{Frecuencia medicina} + \text{Frecuencia enfermería}}{1100}$

PAES M1-2024

FORMA 113 – 2025

53. Considera las siguientes cajas con sus respectivas bolitas grises y blancas.



¿En cuál de las cajas, al extraer al azar una bolita, la probabilidad de que sea gris es mayor que $0{,}5$ y menor que 1?

Ejemplo: Una apuesta sobre cumpleaños

En un grupo de n personas ¿cuál es la probabilidad de que dos personas estén de cumpleaños el mismo día?

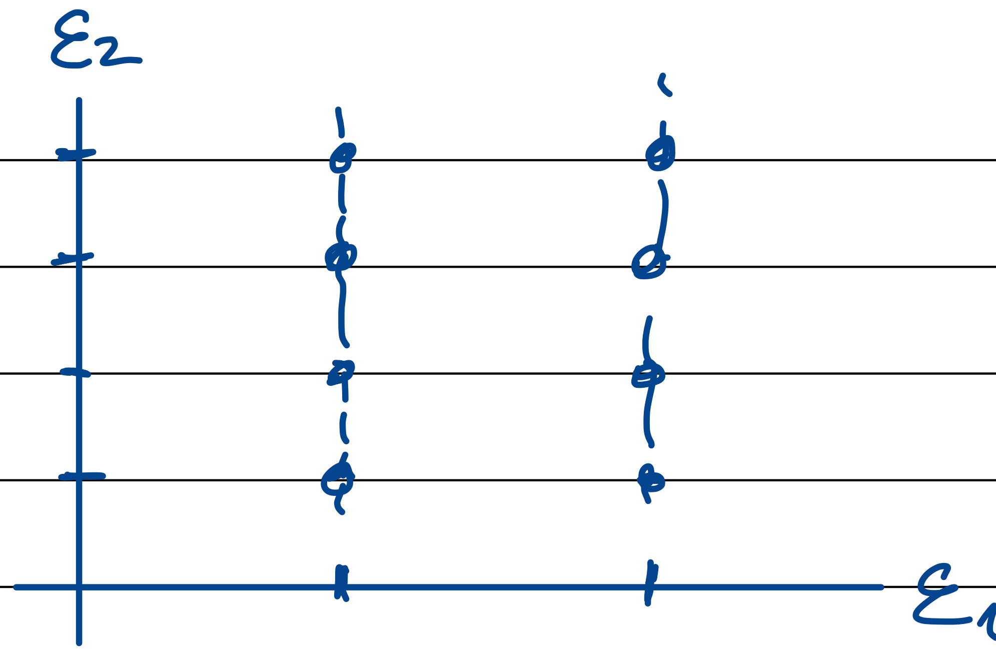
Principio básico del conteo

Supuestos:

- Se realizan dos experimentos: $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$.
- $\mathcal{E}_1$ tiene N_1 resultados posibles.
- Por cada resultado de $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ tiene N_2 resultados posibles.

Conclusión:

- El experimento que consiste en realizar simultáneamente $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$, el que denotamos como $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$, tiene $N_1 \times N_2$ resultados posibles.



Ejemplo

Supongamos que en un colegio hay dos cuartos medios. En el cuarto medio A hay 25 estudiantes, mientras que en el cuarto medio B hay 31 estudiantes. Se debe escoger uno de cada curso para un desafío de Mario Kart. ¿Cuál es el número de posibles desafíos?

\# Desafíos : $\underset{A}{\underline{25}}$ $\underset{B}{\underline{31}}$: 25×31

$$\begin{array}{r} 25 \times 31 \\ \hline 25 \\ 750 \\ \hline 775 \end{array}$$

Principio del conteo generalizado

- K experimentos $\mathcal{E}_i$, $i = 1, \dots, N$.
- $\mathcal{E}_1$ puede terminar en N_1 resultados posibles.
- Por cada resultado de $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ tiene N_2 resultados posibles.
- Por cada resultado de $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ tiene N_3 resultados posibles.
- Por cada resultado de $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \times \mathcal{E}_3$, $\mathcal{E}_4$ tiene N_4 resultados posibles.

$\vdots$

- Por cada resultado de $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \times \ldots \times \mathcal{E}_{K-1}$, $\mathcal{E}_K$ tiene N_K resultados posibles.

Entonces $\mathcal{E}_1 \times \ldots \times \mathcal{E}_K$, tiene $N_1 \times \ldots \times N_K$ resultados posibles.

Ejemplo

¿Cuántas palabras de K caracteres es posible formar?

$$\underset{1}{\underline{26}} \quad \underset{2}{\underline{26}} \quad \underset{3}{\underline{26}} \quad \ldots \quad \underset{K}{\underline{26}}$$

$$\#\ \text{Palabras}: \underbrace{26 \cdot 26 \cdot \quad \cdot 26}_{K} = 26^{K}$$

Permutaciones

Dados N objetos, una **permutación** corresponde a una forma de ordenarlos. ¿Cuántas permutaciones de es posible construir con N objetos distintos?

$$\underset{1}{\underline{N}} \quad \underset{2}{\underline{N-1}} \quad \underset{3}{\underline{N-2}} \quad \ldots \quad \underset{N}{\underline{1}}$$

$$\# \text{ Permutaciones} = N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \ldots \cdot 1$$

$$= N! = N(N-1)!$$

$1! = 1 \qquad 3! = 6 \qquad 5! = 120$

$2! = 2 \qquad 4! = 24 \qquad 6! = 720$

Tuplas

Una tupla es una lista ordenada de objetos. ¿Cuántas tuplas de tamaño K es posible construir con N objetos distintos?

$$\underset{1}{\underline{N}} \quad \underset{2}{\underline{N-1}} \quad \underset{3}{\underline{N-2}} \quad \cdots \quad \underset{K}{\underline{N-(K-1)}}$$

$$\#\text{Tuplas} = N\cdot(N-1)(N-2)\cdots(N-K+1) \times \frac{(N-K)(N-K-1)\cdots 1}{(N-K)(N-K-1)\cdots 1}$$

$$= \frac{N!}{(N-K)!}$$

Subconjuntos

¿Cuántos conjuntos de tamaño K es posible construir con N objetos distintos?

Llamemos $\mathcal{N}(N,k)$

$$\#\text{Tuplas}(N,k) = \mathcal{N}(N,k) \cdot \#\text{Permutaciones}(k)$$

$$\frac{N!}{(N-k)!} = \mathcal{N}(N,k) \cdot k!$$

$$\mathcal{N}(N,k) = \frac{N!}{k!\,(N-k)!} = \binom{N}{k}$$

Ejemplo

Consideremos que en un curso hay 25 estudiantes locales y 5 estudiantes de intercambio. ¿Cuántos grupos de 6 integrantes es posible formar si en cada grupo debe haber un estudiante de intercambio?

$$\underbrace{5}_{EI} \times \underbrace{\binom{25}{5}}_{L}$$

$$\# = 5 \times \frac{25!}{5! \cdot 20!} = \cancel{5} \cdot \frac{25 \cdot \cancel{24} \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot \cancel{20!}}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{20!}}$$

$$= 25 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 =$$

PAES INVIERNO M2-2024

FORMA 191 – 2025

47. En un torneo de tenis cada jugador juega con cada uno de los otros jugadores solo una vez.

Si se realizan 28 partidos en total, ¿cuántos jugadores participaron en este torneo?

A) 27

B) 15

C) 14

~~D)~~ 8

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2\cdot\cancel{(n-2)!}}$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} = 28$$

$$n(n-1) = 56$$

Paradoja del cumpleaños

¿En un grupo con N personas, cuál es la probabilidad de que dos personas estén de cumpleaños el mismo día del año?

Tuplas de tamaño N, con 366 posibilidades para cada posición.

$$A = \{\omega \in \{1 \dots 366\}^N : \exists\, i \neq j : \omega_i = \omega_j\}$$

$$A^c = \{\omega \in \{1 \dots 366\}^N : \forall\, i \neq j : \omega_i \neq \omega_j\}$$

$$P(A^c) = \frac{CF}{CT} = \frac{366\cdot 365 \cdots (366-N+1)}{366^N}$$

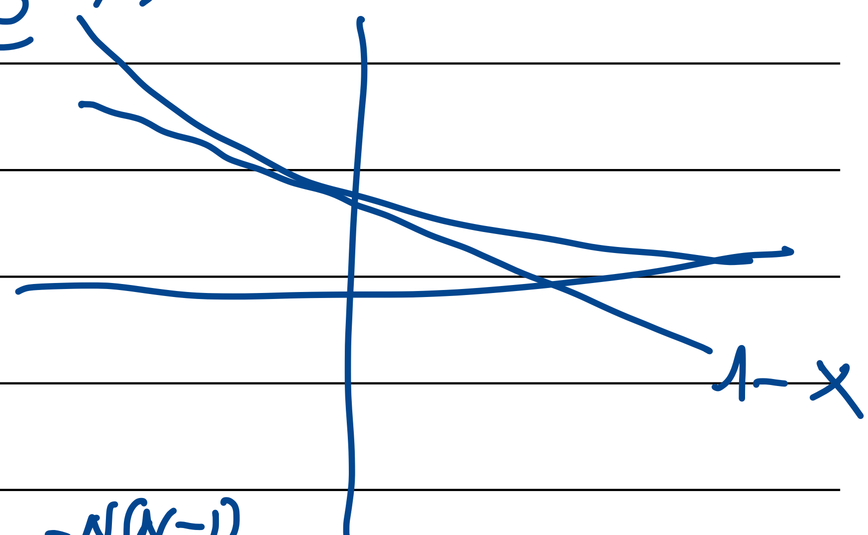
$$= \cancelto{1}{\frac{366}{366}}\cdot\frac{(\cancel{366}-1)}{\cancel{366}}\cdot\frac{(366-2)}{366}\cdots\frac{(366-N+1)}{366}$$

$$= \prod_{k=1}^{N-1}\underbrace{\left(1-\frac{k}{366}\right)}_{\le e^{-k/366}}$$

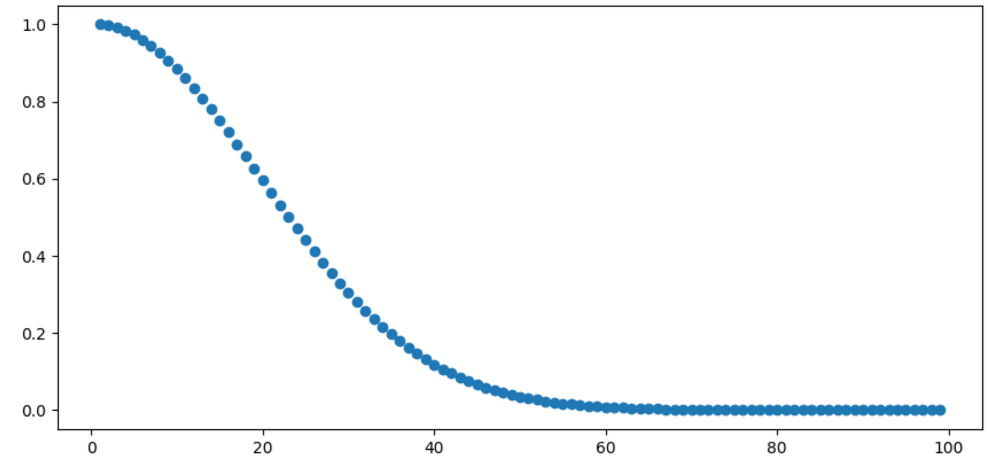
$$\le \prod_{k=1}^{N-1} e^{-k/366}$$

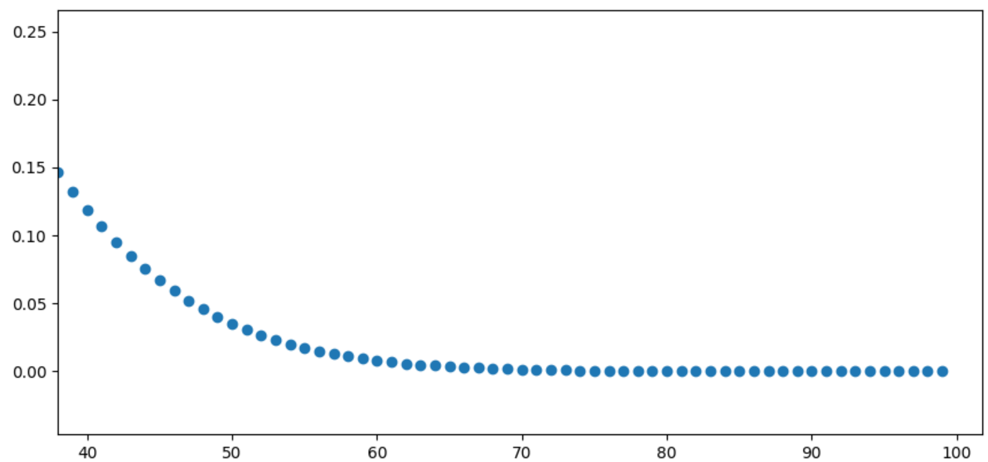
$$= e^{-\frac{1}{366}\sum_{k=1}^{N-1} k}$$

$$= e^{-\frac{N(N-1)}{2\cdot 366}}$$



$$\therefore P(A) \ge 1 - e^{-\frac{N(N-1)}{732}}$$


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
20
40
60
80
100

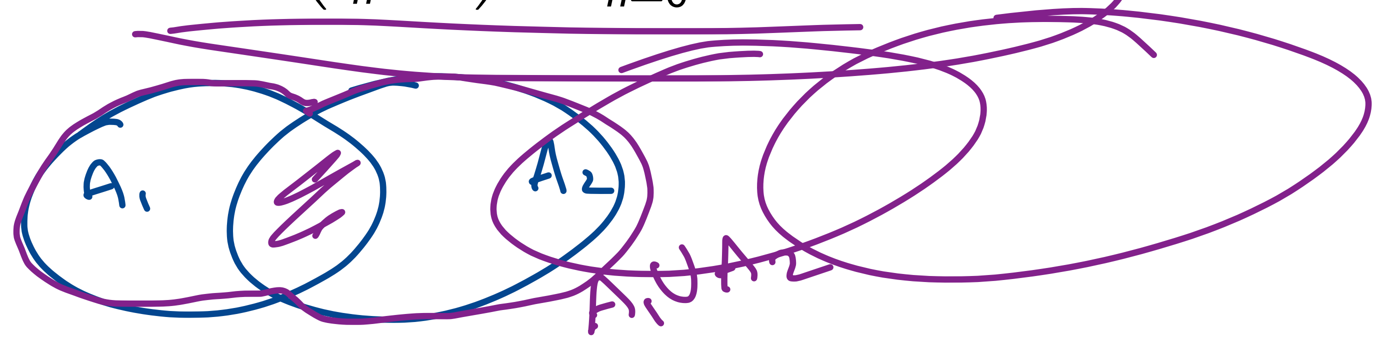

0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
40
50
60
70
80
90
100

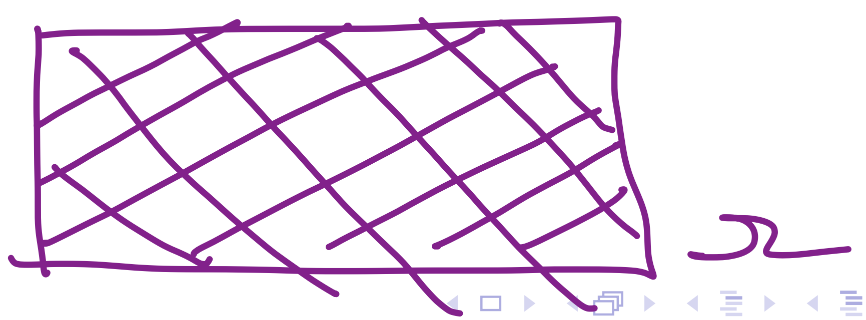
Definición (Medida de Probabilidad)

Sea Ω un conjunto no vacío, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una familia **adecuada** *de subconjuntos de Ω. Diremos que $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ es* **medida de probabilidad** *si satisface:*

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. $\forall \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, *tal que $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $m \neq n$, se tiene que*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

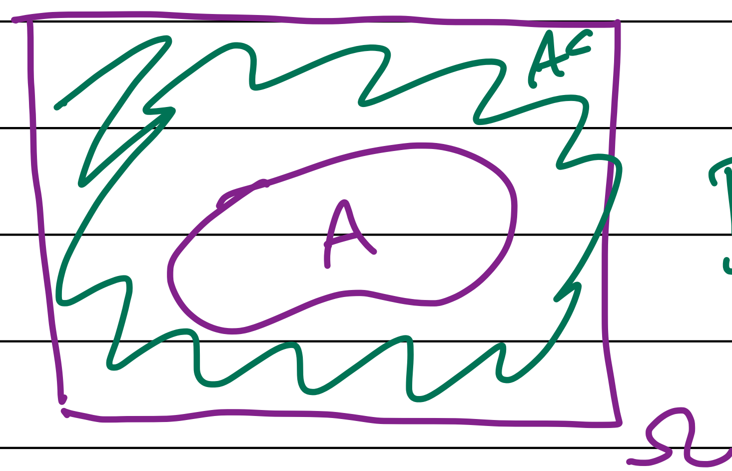




Propiedades elementales de $\mathbb{P}$

1. $(\forall A \in \mathcal{F})\,,\ \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
2. $(\forall A, B \in \mathcal{F})\,,\ \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c)$.
3. $(\forall A, B \in \mathcal{F})\,,\ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

1

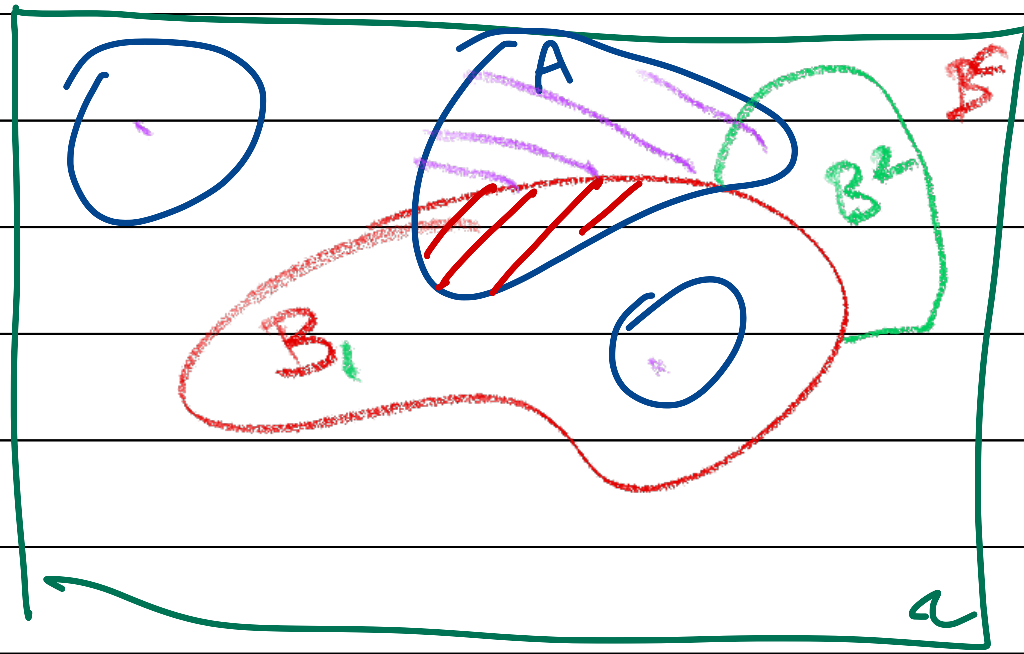


$\Omega = A \cup A^c$

$\underbrace{\mathbb{P}(\Omega)}_{1} = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$

$\therefore \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

2



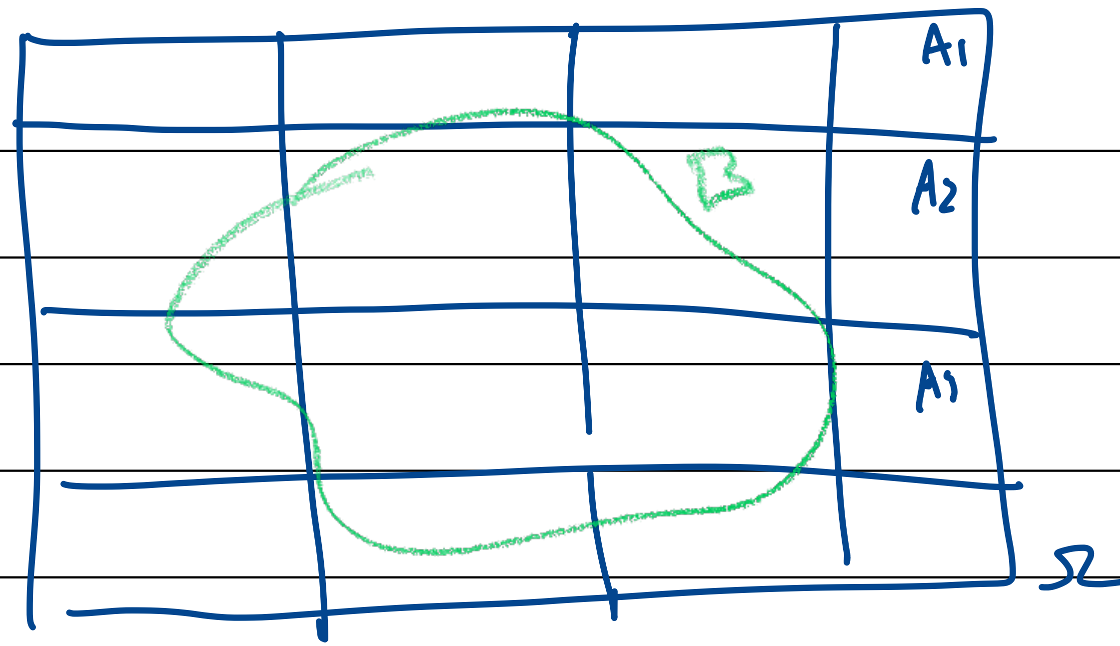
$$A = A \cap B \;\cup\; A \cap B^c$$

$$\therefore\; \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c)$$

Regla de las probabilidades totales

Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, una partición de Ω, es decir $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $m \neq n$ y $\bigcup_n A_n = \Omega$. Entonces, $\forall B \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{P}(B) = \underbrace{\sum_n \mathbb{P}\left(B \cap A_n\right)}.$$



Espacios equiprobables

Sea $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ un conjunto finito. Sobre Ω podemos definir un espacio de probabilidad, con $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ y en el cual cada elemento tiene la misma probabilidad, es decir:

$$\forall \omega \in \Omega :, \ \mathbb{P}(\{\omega\}) = c,$$

donde $c \in [0, 1]$.

Proposición

1. $\forall \omega \in \Omega, \ \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/N.$
2. $\forall A \in \mathcal{F}, \ \mathbb{P}(A) = \#A/N.$

Independencia

Diremos que $A, B \in \mathcal{F}$ son independientes ($A \perp B$) si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}(B)\,.$$

Proposición

1. *Si* $\mathbb{P}(A) = 0$ *o* $\mathbb{P}(A) = 1$, *entonces* $A \perp B$ *para todo* $B \in \mathcal{F}$.
2. *Si* $A \perp B$, *entonces* $A^c \perp B$, $A \perp B^c$ *y* $A^c \perp B^c$.

Ejemplo

Al lanzar dos dados equilibrados, sean los eventos:

$$A = \{\text{la suma de los dados es 7}\},$$

$$B = \{\text{la suma de los dados es 5}\},$$

$$C = \{\text{el primer dado es 4}\}.$$

Entonces $A \perp C$, pero $C \not\perp B$.

$d_2 \backslash d_1$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5.	6	7
2	3	4	5.	6	7	8
3	4	5.	6	7	8	9
4	5.	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$\mathbb{P}(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$\mathbb{P}(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

$\mathbb{P}(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$

$\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{6}.$

Probabilidad Condicional

Si $B \in \mathcal{F}$ cumple $\mathbb{P}(B) > 0$, podemos definir:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

$\mathbb{P}(A \cap B)$
$= \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)$

Notemos que:

1. Si $A \perp B$, entonces $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.
2. Si llamamos $\mathbb{P}_B(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot|B)$, $\mathbb{P}_B$ es una medida de probabilidad.

En efecto: $A \perp B$: $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

$= \dfrac{\mathbb{P}(A) \cdot \cancel{\mathbb{P}(B)}}{\cancel{\mathbb{P}(B)}}$

Ejemplo

Al lanzar dos dados equilibrados, sean los eventos:

$$A = \{\text{la suma de los dados es } 7\},$$

$$B = \{\text{la suma de los dados es } 5\},$$

$$C = \{\text{el primer dado es } 4\}.$$

Calcular $\mathbb{P}(C|B)$.

$$\mathbb{P}(C/B) = \frac{\mathbb{P}(C \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/36}{4/36}$$

$$= \frac{1}{4}$$

PAES M2-2024

FORMA 193 – 2025

48. Se dispone de dos cajas A y B, en A hay en total 3 fichas blancas, 2 rojas y 6 negras, en B hay en total 2 fichas blancas y 3 rojas, todas del mismo tipo.

Se define el siguiente experimento: se lanza un dado común, si el número obtenido es menor que 3, se extrae al azar una ficha de la caja A; en caso contrario, se extrae al azar una ficha de la caja B.

Si se realiza este experimento, ¿cuál es la probabilidad de extraer una ficha negra?

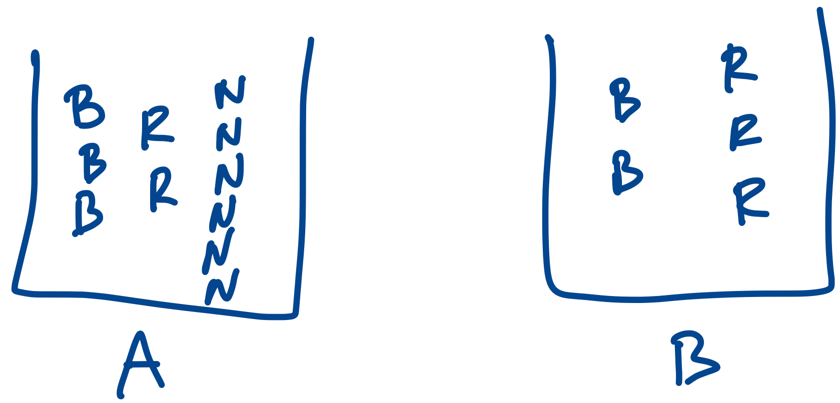
A) $\frac{6}{11}$

B) $\frac{1}{8}$

→ C) $\frac{2}{11}$

D) $\frac{3}{11}$

E) $\frac{3}{8}$



S = Sacar ficha negra.

C = Escoger de la caja A

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S \cap C) + \cancel{\mathbb{P}(S \cap C^c)} \rightarrow 0$$

$$= \mathbb{P}(S/C) \cdot \mathbb{P}(C) = \frac{6}{11} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{11}$$

Teorema de Bayes

Sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$. Entonces:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Si $\{B_i : i = 1, \dots, n\}$ es una partición, entonces:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)$$

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\,\mathbb{P}(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)}$$

$$\mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B/A) \cdot \mathbb{P}(A)$$

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B/A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Examen de Covid:

$P = \{$El examen es positivo$\}$

$E = \{$Tengo covid$\}$

$$\mathbb{P}(E/P) = \frac{\mathbb{P}(P/E)\cdot\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(P)}$$

$$\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(P\cap E) + \mathbb{P}(P\cap E^c)$$

$$= \mathbb{P}(P/E)\cdot\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(P/E^c)(1-\mathbb{P}(E))$$

$$\mathbb{P}(E/P) = \frac{\cancel{0.99}\times 0.01}{\cancel{0.99}\times 0.01 + \underline{0.05}\times \cancel{0.99}} = \frac{1}{6} = 0.16$$

Ejemplo

Se propone un juego en dos etapas:

1. Se lanza un dado equilibrado de seis caras.
2. Se lanza tantas monedas equilibradas como indique el dado.

1. ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres caras?
2. Si sabemos que obtuvimos 3 caras ¿Cuál es la probabilidad de haber sacado 4 en el dado?

PAES Invierno M2-2024

46. Se quiere formar un comité de tres personas: un representante, un secretario y un tesorero, desde un grupo de seis mujeres y ocho hombres.

¿Cuántos grupos distintos se pueden formar si el representante debe ser mujer y el secretario debe ser un hombre?

A) $6 \cdot 8 \cdot 12$

B) $14 \cdot 13 \cdot 12$

C) $2(6 \cdot 8 \cdot 12)$

D) $2(14 \cdot 13 \cdot 12)$

$$\frac{6}{R} \cdot \frac{8}{S} \quad \frac{12}{T}$$

PAES Invierno M2-2024

48. El sindicato de una empresa quiere escoger una directiva compuesta por tres cargos.

Existen 8 postulantes para estos cargos, de los cuales 5 son mujeres y 3 son hombres.

Si se escogiera al azar a tres personas para estos cargos, ¿cuál es la probabilidad de que la directiva elegida esté conformada solo por mujeres?

~~A)~~ $\frac{5}{28}$

B) $\frac{5}{8}$

C) $\frac{3}{8}$

D) $\frac{1}{60}$

E) $\frac{3}{5}$

$$CT = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\cdot 5!} = \frac{\cancel{5!}\cdot \cancel{6}\cdot 7\cdot 8}{\cancel{2\cdot 3}\cdot \cancel{5!}} = 56$$

$$CF = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{\cancel{3!}\cdot \cancel{4}^{2}\cdot 5}{\cancel{3!}\cdot \cancel{1\cdot 2}} = 10$$

$$P = \frac{10}{56} =$$

PAES Invierno M2-2024

FORMA 191 – 2025

50. En una caja hay en total M bolitas azules y N bolitas blancas y en otra caja hay en total 3 bolitas azules y 5 bolitas blancas. Todas las bolitas de las cajas son del mismo tipo.

Si se extrae al azar una bolita de cada caja, ¿cuál de las siguientes expresiones representa la probabilidad de que ambas sean azules?

A) $\dfrac{\mathrm{M}+3}{\mathrm{M}+\mathrm{N}+8} \cdot \dfrac{\mathrm{M}+2}{\mathrm{M}+\mathrm{N}+7}$

B) $\dfrac{\mathrm{M}+3}{\mathrm{M}+\mathrm{N}+8} + \dfrac{\mathrm{M}+2}{\mathrm{M}+\mathrm{N}+7}$

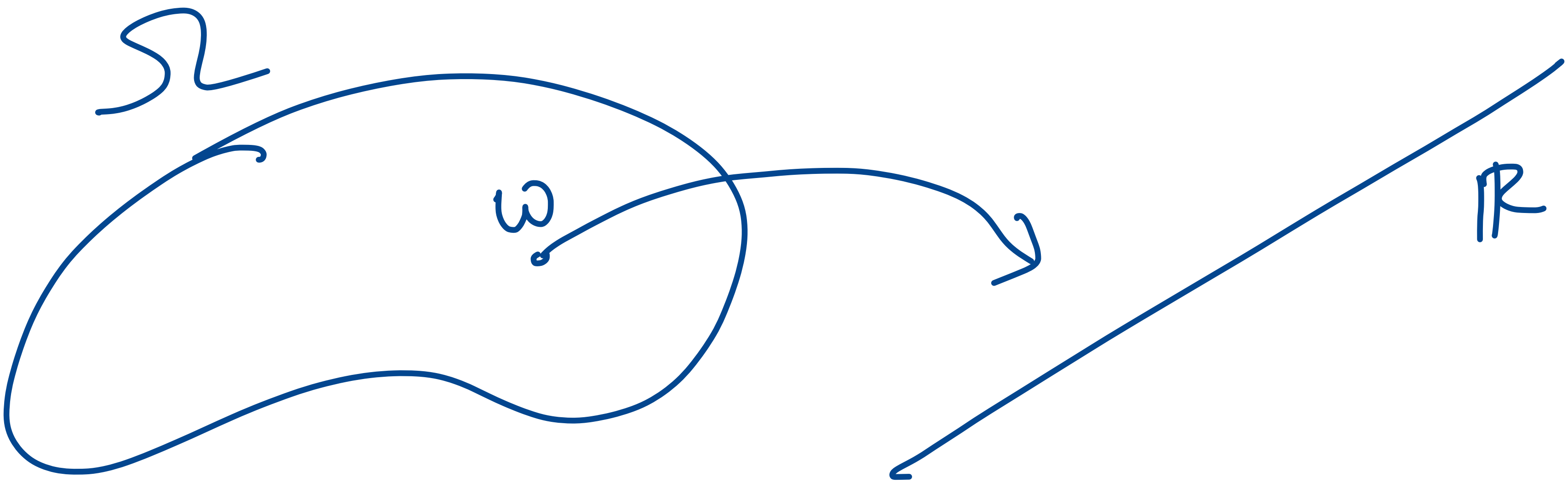
C) $\dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}+\mathrm{N}} + \dfrac{3}{8}$

D) $\dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}+\mathrm{N}} \cdot \dfrac{3}{8}$

Definición (Variable Aleatoria)

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad, una* **variable aleatoria** X *es una función definida en* Ω *y que toma valores en* $\mathbb{R}$. *Es decir,*

$$X : \Omega \to \mathbb{R}.$$



Ejemplo:

Consideremos el experimento de lanzar 4 monedas equilibradas. Si X el número de caras obtenidas, entonces X es una variable aleatoria.

ω	$X(\omega)$
(S,S,S,S)	0
(C,S,S,S)	1
(S,C,S,S)	1
(S,S,C,S)	1
(S,S,S,C)	1

k	$\mathbb{P}(X=k)$
0	$1/16$
1	$4/16$
2	$6/16$
3	$4/16$
4	$1/16$

$$\mathbb{P}(X > 5.000.000) = 0$$

Ejemplo:

Consideremos el experimento de lanzar 2 dados equilibrados. Si Z es la suma de los números obtenidos en la cara superior de cada dado, entonces Z es una variable aleatoria.

La gran idea: Ω no es observable

En general, Ω no es observable, y por lo tanto no podemos determinar el valor que toma X en $\omega \in \Omega$, pues típicamente ni siquiera sabemos quien es ω.

Lo que si conoceremos es **la ley de probabilidades que X induce en** $\mathbb{R}$:

Sea $A \subset \mathbb{R}$:

$$\underline{\mathbb{P}\left(X \in A\right)} = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}\right).$$

$$\mathbb{P}(X \leq -2) = 0$$

Variables aleatorias discretas

Dada una v.a. X, llamaremos **soporte** de X al conjunto:

$$S_X := \{a \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X = a) > 0\}.$$

Se puede demostrar que $S_X = \{a_0, \ldots, a_n, \ldots, \}$.

Definición (Variable Aleatoria Discreta)

Una v.a. X se dirá discreta, si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(X = a_n\right) = 1.$$

Entonces:

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{a_n \in A} \mathbb{P}(X = a_n).$$

En particular, $\mathbb{P}(X \in A) = 0$*, si* $A \cap S_X = \emptyset$*.*

Función de masa de probabilidad

Dada una v.a. discreta X, llamaremos **función de masa de probabilidad**, la que denotaremos por $\mathrm{p}_X : \mathbb{R} \to \infty$, a la función dada por

$$p_X(a) = \mathbb{P}\left(X = a\right).$$

Notemos que:

$$p_X(a) = 0, \text{ si } a \notin S_X.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_X(a_n) = 1.$$

Ejemplo

Sea X la variable aleatoria discreta que tiene la siguiente función de masa de probabilidad

k	2	4	6	8	10	12
$\mathbb{P}(X = k)$	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/32

Calcule:

- La probabilidad de que X sea menor que 9.
- La probabilidad de que X sea mayor que 5.
- la probabilidad de que X sea mayor que 7, pero menor que 11.

$\mathbb{P}(X \text{ es impar}) = 0$

$\mathbb{P}(X < 9) = \mathbb{P}(X = 2 \vee X = 4 \vee X = 6 \vee X = 8)$

$= 15/16$

$\mathbb{P}(X > 5) = 1/4$

$\mathbb{P}(7 < X < 11) = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{2+1}{32} = \frac{3}{32}$

Ejemplo

Encuentre la función de masa de probabilidad de las variables aleatorias X y Z de los ejemplos anteriores.

Valor esperado

La **esperanza**, **valor esperado** o **media** de una variable aleatoria discreta X está dada por

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{a \in S_x} a p_X(a) = \sum_{a \in S_x} a \mathbb{P}(X = a)$$

Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función adecuada (e.g. continua), entonces $g(X)$ es también una variable aleatoria y

$$\mathbb{E}[g(X)] := \sum_{a \in S_x} g(a) p_X(a),$$

$\mathbb{E}\left(\left(X-\mathbb{E}(X)\right)^2\right)$

en particular si $g(x) = x^k$, llamamos **momento de orden** k de X a

$$\mathbb{E}[X^k] := \sum_{a \in S_x} x^k p_X(a).$$

Ejemplo

Sea X la variable aleatoria discreta que tiene la siguiente función de masa de probabilidad

k	2	4	6	8	10	12
$\mathbb{P}(X = k)$	$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/16$	$1/32$	$1/32$

Calcule $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{V}\text{ar}[X]$ y $\mathbb{E}[X^4]$.

$$\mathbb{E}(X) = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + \cancel{4} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} + \overset{3}{\cancel{6}} \cdot \frac{1}{\underset{4}{\cancel{8}}} + \cancel{8} \cdot \frac{1}{\underset{2}{\cancel{16}}} + \overset{5}{\cancel{10}} \cdot \frac{1}{\underset{16}{\cancel{32}}}$$

$$+ \overset{6}{\cancel{12}} \cdot \frac{1}{\underset{16}{\cancel{32}}}$$

$$= \frac{16 + 16 + 12 + 8 + 5 + 6}{16} = \frac{63}{16}$$

$$= 3\,\frac{15}{16}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left((X-m)^2\right)$$

$$= (2-m)^2 \cdot \frac{1}{2} + (4-m)^2 \cdot \frac{1}{4}$$

$$+ (6-m)^2 \frac{1}{8} + (8-m)^2 \cdot \frac{1}{16}$$

$$+ (10-m)^2 \frac{1}{32} + (12-m)^2 \frac{1}{32}$$

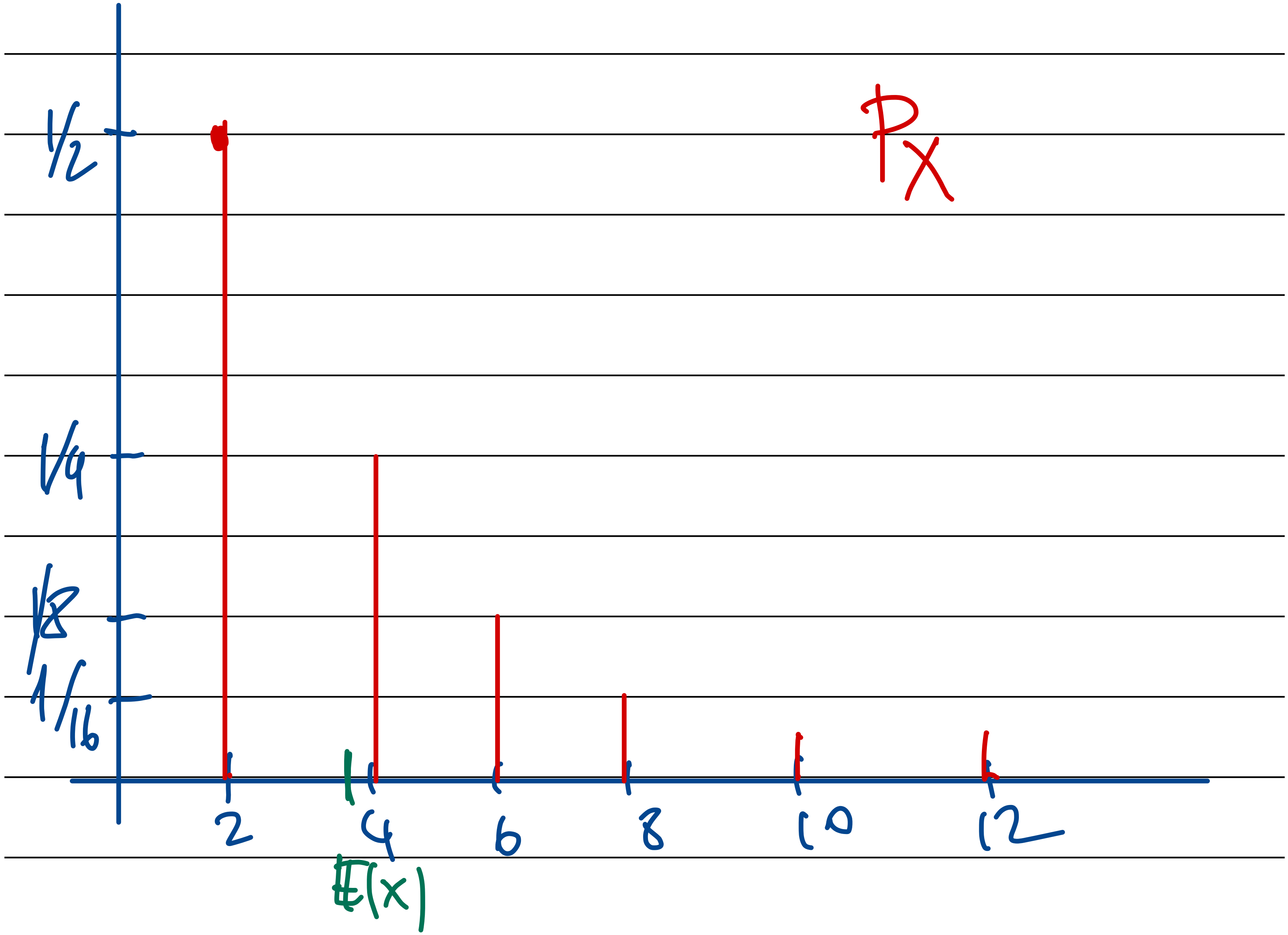
Si $m = 4$

$$= \frac{4}{2} + \frac{4}{8} + \frac{16}{16} + \frac{36}{32} + \frac{64}{32}$$

$$= 2 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{36}{32} + 2$$

$$= 5 + \frac{16+36}{32} = 5\,\frac{52}{32} = 6\,\frac{20}{32}$$

$$SD(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} \approx \sqrt{6.6} \sim 2.5$$



p_X
1/2
1/4
1/8
1/16
2
4
6
8
10
12
$\mathbb{E}(X)$

Propiedad

Sea X una v.a. y $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$$

Varianza de una variable aleatoria discreta

Dada una variable aleatoria X con media μ, se define:

- La **varianza** de X como
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}[(X-\mu)^2].$$
- La **desviación estándar** de X por $\mathrm{SD}(X) := \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)}$.

Propiedades:

- $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mu^2$.
- Sean $a, b \in \mathbb{R}$: $\mathbb{V}\mathrm{ar}(aX + b) = a^2\, \mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$

Variables clásicas: Bernoulli

Diremos que X es una v.a. de Bernoulli de parámetro $p \in [0,1]$ si

$$p_X(k) = (1-p)^{1-k} p^k, \ k \in \{0,1\}.$$

Encontrar: $\mathbb{E}[X], \mathbb{V}\mathrm{ar}[X]$.

Variables clásicas: Binomial

Diremos que X es una v.a. Binomial de parámetros $n \geq 1$ y $p \in [0, 1]$ si

$$p_X(k) = \binom{n}{k}(1-p)^{n-k}p^k, \quad k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Se puede demostrar que: $\mathbb{E}[X] = np$ y $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = np(1-p)$.

Ejemplo: Si $n = 5$ y $p = 1/2$:

- Calcule $\mathbb{E}[X]$ y $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X]$.
- Calcule $\mathbb{P}(X > \mathbb{E}[X])$.

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k} \cdot \frac{1}{2}^k = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

0	1	2	3	4	5
$\binom{5}{0}\frac{1}{2^5}$	$\binom{5}{1}\frac{1}{2^5}$	...			