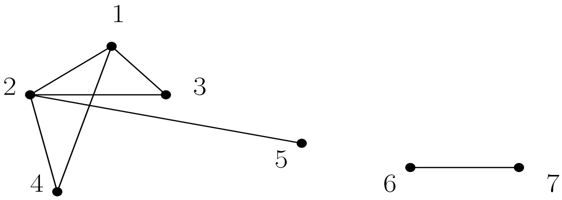
Grafos: redes, estructuras y colores

Daniel Quiroz

Insituto de Ingeniería Matemática & CIMFAV
Universidad de Valparaíso

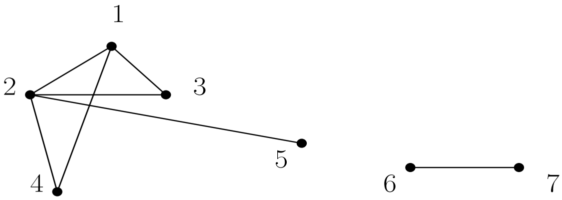
Escuela de Invierno, Junio, 2024

Un grafo $G = (V, E)$, está compuesto por un conjunto V de vértices y un conjunto E de aristas, que son conexiones entre vértices.



Aquí los vértices 1 y 3 están unidos por una arista y por eso decimos que son vecinos.

Un grafo $G = (V, E)$, está compuesto por un conjunto V de vértices y un conjunto E de aristas, que son conexiones entre vértices.



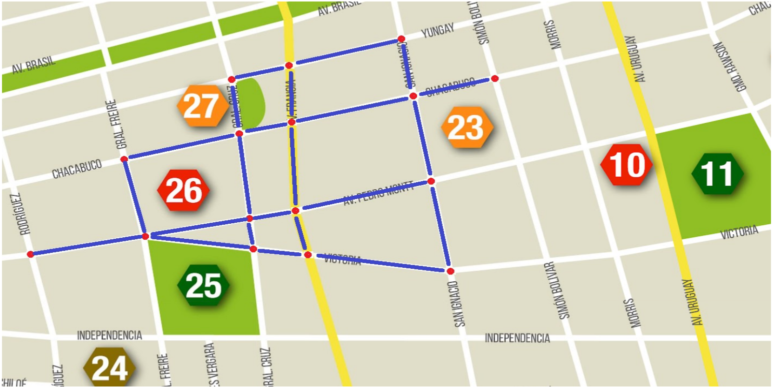
Aquí los vértices 1 y 3 están unidos por una arista y por eso decimos que son vecinos.

¿Para qué puede servir algo así?

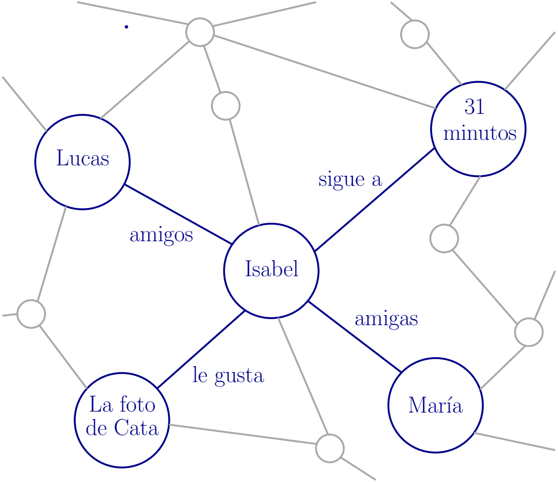
Caminos más cortos (redes de transporte)

(Fuente: Muni Valpo)

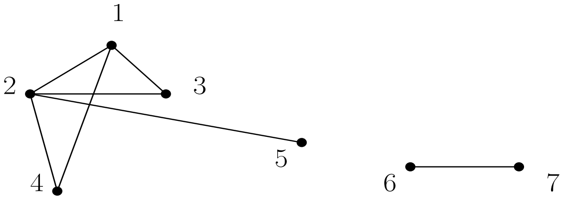
Caminos más cortos (redes de transporte)



Redes sociales

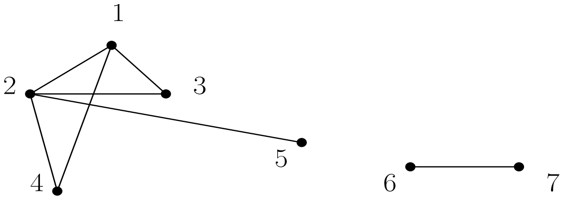


Un grafo $G = (V, E)$, está compuesto por un conjunto V de vértices y un conjunto E de aristas, que son conexiones entre vértices.



Aquí los vértices 1 y 3 están unidos por una arista y por eso decimos que son vecinos.

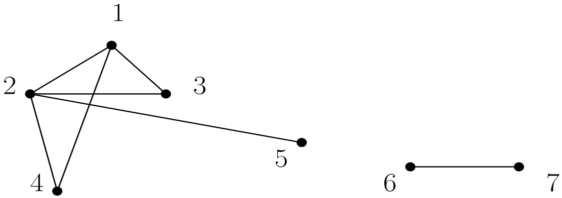
Un grafo $G = (V, E)$, está compuesto por un conjunto V de vértices y un conjunto E de aristas, que son conexiones entre vértices.



Aquí los vértices 1 y 3 están unidos por una arista y por eso decimos que son vecinos.

El vecindario $N(v)$ de un vértice es el conjunto formado por sus vecinos.
Aquí $N(3) = \{1, 2\}$.
El grado de un vértice es el tamaño de su vecindario.

Un grafo $G = (V, E)$, está compuesto por un conjunto V de vértices y un conjunto E de aristas, que son conexiones entre vértices.



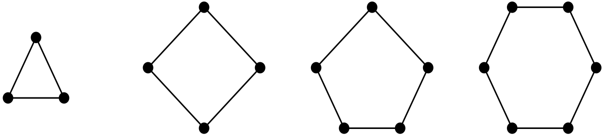
Aquí los vértices 1 y 3 están unidos por una arista y por eso decimos que son vecinos.

El vecindario $N(v)$ de un vértice es el conjunto formado por sus vecinos.
Aquí $N(3) = \{1, 2\}$.
El grado de un vértice es el tamaño de su vecindario.

Si entre cada par de vértices existe un camino, decimos que el grafo es conexo.

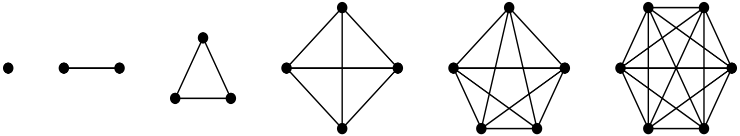
Familias de grafos: por grado

Los ciclos son grafos conexos tal que todos sus vértices tienen grado 2.



etc.

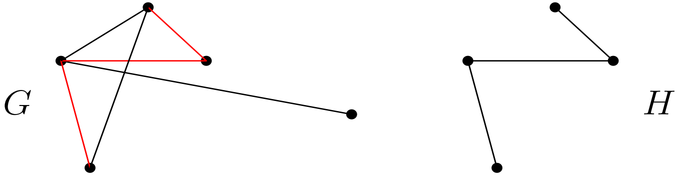
Los completos son grafos tal que todos sus vértices tienen grado $|V| - 1$.



etc.

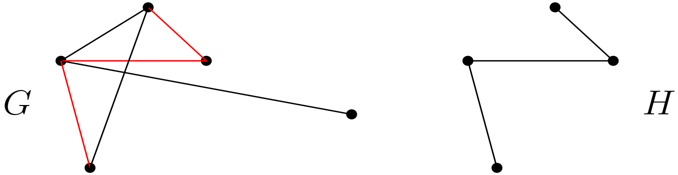
Familias de grafos: por subgrafos prohibidos

Un grafo H es un subgrafo de otro grafo G, si se puede obtener a partir de G tras posiblemente eliminar vértices o aristas.

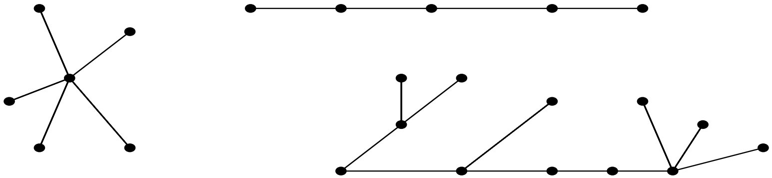


Familias de grafos: por subgrafos prohibidos

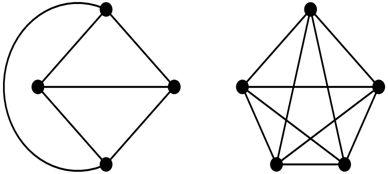
Un grafo H es un subgrafo de otro grafo G, si se puede obtener a partir de G tras posiblemente eliminar vértices o aristas.



Los árboles son grafos conexos que no tienen ciclos como subgrafos.

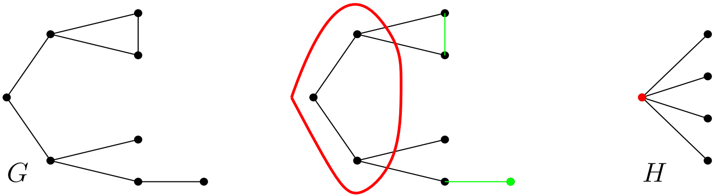


Un grafo es planar si se puede dibujar en el plano sin cruces entre aristas o vértices.
- Los ciclos son planares.
- Los árboles son planares.
- El completo en 4 vértices es planar.
- El completo en 5 vértices no es planar.



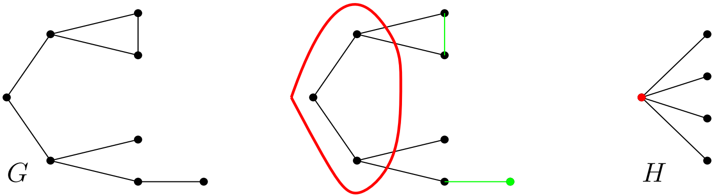
Al reemplazar "plano" por tu superficie favorita, obtienes nuevas familias. También puedes permitir cierto número de cruces por arista...

Un grafo H es un menor de otro grafo G, si se puede obtener a partir de G tras posiblemente eliminar vértices, eliminar aristas, o contraer subgrafos conexos.



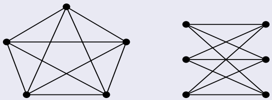
Familias de grafos: por menores prohibidos

Un grafo H es un menor de otro grafo G, si se puede obtener a partir de G tras posiblemente eliminar vértices, eliminar aristas, o contraer subgrafos conexos.



Teorema (Wagner, 1937)

Un grafo es planar si y sólo si no contiene ninguno de estos dos grafos como menores:



Número cromático

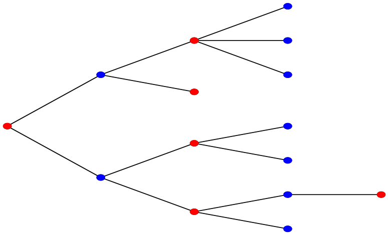
Colorear un grafo es asignar “colores” a los vértices de un grafo de modo que si u y v son vecinos, entonces sus colores son distintos.

El número cromático $\chi(G)$ de un grafo G es el menor número de colores con los que puedo colorear a G.

Colorear un grafo es asignar "colores" a los vértices de un grafo de modo que si u y v son vecinos, entonces sus colores son distintos.

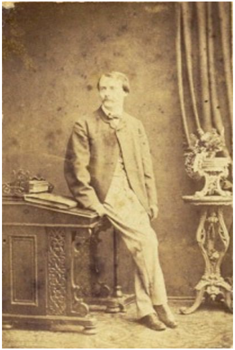
El número cromático $\chi(G)$ de un grafo G es el menor número de colores con los que puedo colorear a G.

- Ciclos: $\chi(G) = 2$ si el ciclo es par, y $\chi(G) = 3$ si el ciclo es impar.
- Completos: $\chi(G) = |V(G)|$.
- Árboles: $\chi(G) \leq 2$.



¡$\chi(G) \leq 4$ para G planar!

Francis Guthrie (1852)

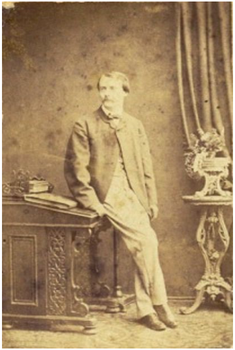


*

Appel y Haken (1976)

¡$\chi(G) \leq 4$ para G planar!

Francis Guthrie (1852)



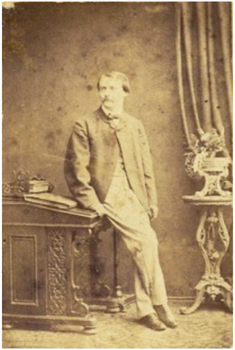
*

Appel y Haken (1976)

* Minkowsky (1905): en una mañana lleviosa, dijo "el cielo está molesto con mi arrogancia. Mi prueba también es defectuosa".

¡$\chi(G) \leq 4$ para G planar!

Francis Guthrie (1852)



*

Appel y Haken (1976)

* Minkowsky (1905): en una mañana lleviosa, dijo "el cielo está molesto con mi arrogancia. Mi prueba también es defectuosa".

Robertson, Sanders, Seymour y Thomas (1997): de una prueba de 741 páginas a una de 43.

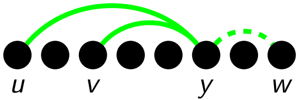
No conozco el apellido de mi grafo

. . . y por tanto no sé a que familia pertenece.
¿Cómo obtengo una cota superior para su número cromático?

No conozco el apellido de mi grafo

. . . y por tanto no sé a que familia pertenece.
¿Cómo obtengo una cota superior para su número cromático?

Sea $\Delta(G)$ el máximo grado de un vértice de G.
Una cota fácil: $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$



Mejoremos esta idea

Ordenemos bien los vértices.

Tomo el vértice con menor grado y lo pongo de último.

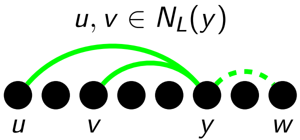
En lo que me queda, tomo el de menor grado y lo pongo de penúltimo...

Mejoremos esta idea

Ordenemos bien los vértices.

Tomo el vértice con menor grado y lo pongo de último.

En lo que me queda, tomo el de menor grado y lo pongo de penúltimo...

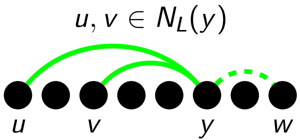


Sea L el ordenamiento obtenido y $N_L(y)$ al conjunto de vecinos de y que están antes que y en L.

Ordenemos bien los vértices.

Tomo el vértice con menor grado y lo pongo de último.

En lo que me queda, tomo el de menor grado y lo pongo de penúltimo...



Sea L el ordenamiento obtenido y $N_L(y)$ al conjunto de vecinos de y que están antes que y en L.

El número de coloreo de G es

$$\mathrm{col}(G) = 1 + \max_{y \in V(G)} |N_L(y)|.$$

Claramente, $\chi(G) \leq \mathrm{col}(G)$.

Encontrando vértices de grado chico

Un grafo planar con n vértices y m aristas satisface

$$m \leq 3n - 6$$

Encontrando vértices de grado chico

Un grafo planar con n vértices y m aristas satisface

$$m \leq 3n - 6$$

Esto implica que todo grafo planar G tiene un vértice de grado a lo más 5.

Por tanto, existe un orden L de los vértices de G tal que para todo vértice y tenemos $|N_L(y)| \leq 5$.

Un grafo planar con n vértices y m aristas satisface

$$m \leq 3n - 6$$

Esto implica que todo grafo planar G tiene un vértice de grado a lo más 5.

Por tanto, existe un orden L de los vértices de G tal que para todo vértice y tenemos $|N_L(y)| \leq 5$.

La cota $\chi(G) \leq \mathrm{col}(G)$ NO siempre es tan buena los grafos 2-coloreables pueden tener $\mathrm{col}(G)$ arbitratiamente grande.

¿Qué hace que el número cromático sea grande?

¿Qué hace que el número cromático sea grande?

Sea $\omega(G)$ el tamaño del subgrafo completo más grande de G.
Claramente $\omega(G) \leq \chi(G)$ para todo G.

¿Qué hace que el número cromático sea grande?

Sea $\omega(G)$ el tamaño del subgrafo completo más grande de G.
Claramente $\omega(G) \leq \chi(G)$ para todo G.

Entonces ω grande me implica χ grande. ¿Y al revés?

¿Qué hace que el número cromático sea grande?

Sea $\omega(G)$ el tamaño del subgrafo completo más grande de G.
Claramente $\omega(G) \leq \chi(G)$ para todo G.

Entonces ω grande me implica χ grande. ¿Y al revés?

NOOO

Teorema (Mycielski, 1955)

Para todo t, existe un grafo G sin K_3 como subgrafo y con $\chi(G) = t$.

Número crómatico y subgrafos

Teorema (Mycielski, 1955)

Para todo t, existe un grafo G sin K_3 como subgrafo y con $\chi(G) = t$.

Número crómatico y subgrafos

Teorema (Mycielski, 1955)

Para todo t, existe un grafo G sin K_3 como subgrafo y con $\chi(G) = t$.

Demostración: Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ los vértices de un grafo H sin triángulos. Buscamos construir a partir de H otro grafo sin triángulos que necesite más colores.

Número crómatico y subgrafos

Teorema (Mycielski, 1955)

Para todo t, existe un grafo G sin K_3 como subgrafo y con $\chi(G) = t$.

Demostración: Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ los vértices de un grafo H sin triángulos. Buscamos construir a partir de H otro grafo sin triángulos que necesite más colores.

Construimos un grafo $\mu(H)$ que tiene a H como subgrafo y $n+1$ vértices adicionales $u_1, u_2, \ldots, u_n$ y w.

Número crómatico y subgrafos

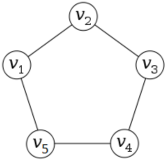
Teorema (Mycielski, 1955)

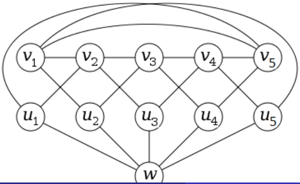
Para todo t, existe un grafo G sin K_3 como subgrafo y con $\chi(G) = t$.

Demostración: Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ los vértices de un grafo H sin triángulos. Buscamos construir a partir de H otro grafo sin triángulos que necesite más colores.

Construimos un grafo $\mu(H)$ que tiene a H como subgrafo y $n+1$ vértices adicionales $u_1, u_2, \ldots, u_n$ y w.

Para cada i, los vecinos de v_i en H son vecinos de u_i en $\mu(H)$. Además, w es vecino de todos los u_i.





Número crómatico y subgrafos

Teorema (Mycielski, 1955)

Para todo t, existe un grafo G sin K_3 como subgrafo y con $\chi(G) = t$.

Notar que K_3 es también un ciclo. La cintura de un grafo G es el largo del ciclo más corto en G. El Teorema de Mycielski nos dice que hay grafos con cintura al menos 4 y número crómatico arbitrariamente alto.

Número crómatico y subgrafos

Teorema (Mycielski, 1955)

Para todo t, existe un grafo G sin K_3 como subgrafo y con $\chi(G) = t$.

Notar que K_3 es también un ciclo. La cintura de un grafo G es el largo del ciclo más corto en G. El Teorema de Mycielski nos dice que hay grafos con cintura al menos 4 y número crómatico arbitrariamente alto.

Teorema (Erdős, 1959)

Para todo t, ℓ, existe un grafo G con cintura al menos ℓ y $chi(G) \geq t$.

Número crómatico y subgrafos

Teorema (Mycielski, 1955)

Para todo t, existe un grafo G sin K_3 como subgrafo y con $\chi(G) = t$.

Notar que K_3 es también un ciclo. La cintura de un grafo G es el largo del ciclo más corto en G. El Teorema de Mycielski nos dice que hay grafos con cintura al menos 4 y número crómatico arbitrariamente alto.

Teorema (Erdős, 1959)

Para todo t, ℓ, existe un grafo G con cintura al menos ℓ y $chi(G) \geq t$.

Erdős NO dió construcción. Inventó el "método probabilístico".

Conclusión...

Si tengo número crómatico alto no puedo garantizar subgrafos completos grandes, ni ciclos chicos.

Conclusión...

Si tengo número crómatico alto no puedo garantizar subgrafos completos grandes, ni ciclos chicos.

Mi grafo podría ser localmente un árbol (sin ciclos y 2-coloreable) y aún así tener número cromático alto por razones "globales".

Conclusión...

Si tengo número crómatico alto no puedo garantizar subgrafos completos grandes, ni ciclos chicos.

Mi grafo podría ser localmente un árbol (sin ciclos y 2-coloreable) y aún así tener número cromático alto por razones "globales".

Tener número crómatico alto no nos garantiza mucho en términos de subgrafos...

¿Y menores?

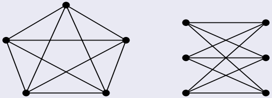
El Teorema de Cuatro Colores nos dice que si G tiene $\chi(G) \geq 5$, entonces G no es planar.

¿Y menores?

El Teorema de Cuatro Colores nos dice que si G tiene $\chi(G) \geq 5$, entonces G no es planar.

Teorema (Wagner, 1937)

Un grafo es planar si y sólo si no contiene ninguno de estos dos grafos como menores:

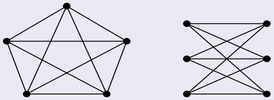


¿Y menores?

El Teorema de Cuatro Colores nos dice que si G tiene $\chi(G) \geq 5$, entonces G no es planar.

Teorema (Wagner, 1937)

Un grafo es planar si y sólo si no contiene ninguno de estos dos grafos como menores:



Juntando estos dos teoremas, obtenemos:
si $\chi(G) \geq 5$, entonces sé que contiene alguno de estos dos grafos como menores.

¿Y menores?

Conjetura (Hadwiger 1943)

Si $\chi(G) \geq t$, *entonces* G *contiene a* K_t *como menor.*

Conjetura (Hadwiger 1943)

Si $\chi(G) \geq t$, entonces G contiene a K_t como menor.

Fácil para $t \leq 3$.

¿Y menores?

Conjetura (Hadwiger 1943)

Si $\chi(G) \geq t$, *entonces* G *contiene a* K_t *como menor.*

Fácil para $t \leq 3$.

Aún sencilla para $t \leq 4$ (Dirac, 1952).

¿Y menores?

Conjetura (Hadwiger 1943)

Si $\chi(G) \geq t$, entonces G contiene a K_t como menor.

Fácil para $t \leq 3$.

Aún sencilla para $t \leq 4$ (Dirac, 1952).

Se sabe cierta para $t = 5, 6$ pero las demostraciones dependen del Teorema de Cuatro Colores.

¿Y menores?

Conjetura (Hadwiger 1943)

Si $\chi(G) \geq t$, entonces G contiene a K_t como menor.

Fácil para $t \leq 3$.

Aún sencilla para $t \leq 4$ (Dirac, 1952).

Se sabe cierta para $t = 5, 6$ pero las demostraciones dependen del Teorema de Cuatro Colores.

Resultados muy recientes (2023) dicen que G con $\chi(G) \geq t$ contiene un menor completo en $\lceil \frac{t}{f(t)} \rceil$ vértices, donde $f(t) \in \mathcal{O}(\log \log t)$

Pero no sé sabe si $f(t)$ puede ser constante.

¡Gracias por su atención!

¡Gracias!

Conjetura (Hadwiger 1943)

Si $\chi(G) \geq t$, *entonces* G *contiene a* K_t *como menor.*

Veamos que grafos sin K_t como menor tienen número cromático acotado.

Proposición

Si G *no contiene a* K_t *como menor, entonces* $\chi(G) \leq 2^{t-1}$.