Probabilidad y Estadística

7ta Escuela de Invierno Ingemat para Estudiantes de Enseñanza Media

Karine Bertin

karine.bertin@uv.cl

Instituto de Ingeniería Matemática - ingemat.uv.cl

23 de junio de 2026

Probabilidad y aleatoriedad en la vida cotidiana

- ¿Cómo estará el clima mañana?

Probabilidad y aleatoriedad en la vida cotidiana

- ¿Cómo estará el clima mañana?
- ¿Va a subir el precio de una acción en la bolsa?

Probabilidad y aleatoriedad en la vida cotidiana

- ¿Cómo estará el clima mañana?
- ¿Va a subir el precio de una acción en la bolsa?
- ¿Voy a ganar a la loteria?

Probabilidad y aleatoriedad en la vida cotidiana

- ¿Cómo estará el clima mañana?
- ¿Va a subir el precio de una acción en la bolsa?
- ¿Voy a ganar a la loteria?
- ¿Al lanzar una modeda, voy a obtener cara o sello?

Noción clásica de probabilidad

Consideremos un experimento con n resultados posibles $\Omega = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$, todos ellos igualmente factibles. Dado un subconjunto $R \subset \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$, diremos que la probabilidad de R, que denotaremos por $\mathbb{P}(R)$, se calcula como:

$$\mathbb{P}(R) = \frac{\#\{R\}}{\#\Omega} = \frac{n(R)}{n(\Omega)} = \frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos totales}}.$$

Ejemplo: Lanzamiento de monedas

¿Cual es la probabilidad de obtener cara?

Ejemplo: Lanzamiento de dados

¿Cual es la probabilidad de obtener un numero par si lanzo un dado?

Ejemplo: Lanzamiento de 3 monedas

¿Cual es la probabilidad de obtener 3 veces cara?

¿Cual es la probabilidad de obtener al menos un cara?

PAES M1-2026

FORMA 111 – 2026

65. Un juego de azar consiste en lanzar tres monedas simultáneamente. El puntaje obtenido por un jugador está dado por la expresión $c - 2s$, tal que c y s corresponden a la cantidad de caras y de sellos, respectivamente, obtenidos en el lanzamiento.

¿Cuál es la probabilidad de que un jugador obtenga un puntaje negativo en un lanzamiento?

A) $\frac{1}{8}$

B) $\frac{1}{4}$

C) $\frac{3}{8}$

D) $\frac{1}{2}$

PAES M1-2024

51. En una encuesta, las personas indicaron su preferencia de estilo musical, eligiendo solo una de entre las opciones rock, pop, rap y reguetón, obteniéndose las respuestas que se presentan en la siguiente tabla:

Estilo Musical	Frecuencia
Rock	7
Pop	4
Rap	3
Reguetón	6

Si se selecciona al azar a una persona de las encuestadas, ¿cuál es la probabilidad de que prefiera el rock?

PAES M1-2026

FORMA 111 – 2026

62. En la tabla adjunta se presentan los resultados de una encuesta realizada a un grupo de estudiantes sobre el área de preferencia para realizar sus estudios superiores.

Área de preferencia	Hombre	Mujer
Científica	7	10
Humanista	4	6
Matemática	8	9
Artística	3	5

Si se selecciona al azar a una persona del grupo de estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer y que escoja el área artística?

A) $\frac{5}{52}$

B) $\frac{1}{5}$

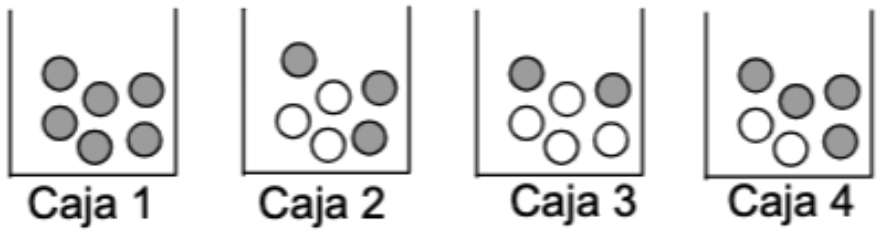
C) $\frac{5}{8}$

D) $\frac{5}{30}$

PAES M1-2024

FORMA 113 – 2025

53. Considera las siguientes cajas con sus respectivas bolitas grises y blancas.



¿En cuál de las cajas, al extraer al azar una bolita, la probabilidad de que sea gris es mayor que $0{,}5$ y menor que 1?

Ejemplo: probabilidades en el poquer

Clasificación de las manos [editar]

Top	Nombre en español	*Nombre en inglés*	Descripción	Ejemplo	Combinaciones Posibles	Probabilidad
1	**Escalera real** o **flor imperial**	*Royal flush*	Cinco cartas seguidas del mismo palo del 10 al as.		4 de 2 598 960	0.000 154 %
2	**Escalera de color**	*Straight flush*	Cinco cartas consecutivas del mismo palo.		36 de 2 598 960	0.001 385 %
3	**Póker**	*Four of a kind* o *Quad*	Cuatro cartas iguales en su valor.		624 de 2 598 960	0.024 %
4	**Full**	*Full House*	Tres cartas iguales en su valor (trío), más otras dos iguales en su valor (pareja).		3744 de 2 598 960	0.144 057 6 %
5	**Color**	*Flush*	Cinco cartas del mismo palo, sin ser consecutivas.		5108 de 2 598 960	0.1965 %
6	**Escalera**	*Straight*	Cinco cartas consecutivas sin importar el palo.		10 200 de 2 598 960	0.3924 %
7	**Trío**	*Three of a kind* o *Set*	Tres cartas iguales de valor.		54 912 de 2 598 960	2.1113 %
8	**Doble pareja**	*Two pair* o *Pocket*	Dos pares de cartas del mismo número (par y par).		123 552 de 2 598 960	4.759 %
9	**Pareja**	*One pair*	Dos cartas iguales de número (y tres diferentes).		1 098 240 de 2 598 960	42.257 %
10	**Carta alta**	*High card*	Gana quien tiene la carta más alta de todas.		1 302 540 de 2 598 960	50.1177 %

Figura: Fuente: Wikipedia

Principio básico del conteo

Supuestos:

- Se realizan dos experimentos: $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$.
- $\mathcal{E}_1$ tiene N_1 resultados posibles.
- Por cada resultado de $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ tiene N_2 resultados posibles.

Conclusión:

- El experimento que consiste en realizar simultáneamente $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$, el que denotamos como $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$, tiene $N_1 \times N_2$ resultados posibles.

Ejemplo

Supongamos que en un colegio hay dos cuartos medios. En el cuarto medio A hay 25 estudiantes, mientras que en el cuarto medio B hay 31 estudiantes. Se debe escoger un(a) estudiante de cada curso para ser delegado(a) de curso. ¿Cuál es el número de posibles pares de delegado(a)s?

Principio del conteo generalizado

- K experimentos $\mathcal{E}_i$, $i = 1, \ldots, N$.
- $\mathcal{E}_1$ puede terminar en N_1 resultados posibles.
- Por cada resultado de $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ tiene N_2 resultados posibles.
- Por cada resultado de $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ tiene N_3 resultados posibles.
- Por cada resultado de $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \times \mathcal{E}_3$, $\mathcal{E}_4$ tiene N_4 resultados posibles.

$\vdots$

- Por cada resultado de $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \times \ldots \times \mathcal{E}_{K-1}$, $\mathcal{E}_K$ tiene N_K resultados posibles.

Entonces $\mathcal{E}_1 \times \ldots \times \mathcal{E}_K$, tiene $N_1 \times \ldots \times N_K$ resultados posibles.

Ejemplo

¿Cuántas palabras de K caracteres es posible formar?

Permutaciones

Dados N objetos, una **permutación** corresponde a una forma de ordenarlos. ¿Cuántas permutaciones es posible construir con N objetos distintos? Este numero lo denotamos $N!$.

¿Cuántas permutaciones es posible construir con 4 objetos distintos?

Tuplas

Una tupla es una lista ordenada de objetos. ¿Cuántas tuplas de tamaño K es posible construir con N objetos distintos? Este numero lo denotamos P_k^N.

¿Cuántas tuplas de tamaño 3 es posible construir con 4 objetos distintos?

Subconjuntos

El numero de subconjuntos distintos de tamaño K que se pueden construir a partir de N objetos es el numero de combinaciones de N en k:

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{(N-k)!k!}$$

¿Cuántas subconjuntos de tamaño 3 es posible construir con 4 objetos distintos?

Ejemplo

Consideremos que en un curso hay 25 estudiantes locales y 5 estudiantes de intercambio. ¿Cuántos grupos de 6 integrantes es posible formar si en cada grupo debe haber exactamente un estudiante de intercambio?

PAES Invierno M2-2024

46. Se quiere formar un comité de tres personas: un representante, un secretario y un tesorero, desde un grupo de seis mujeres y ocho hombres.

¿Cuántos grupos distintos se pueden formar si el representante debe ser mujer y el secretario debe ser un hombre?

A) $6 \cdot 8 \cdot 12$

B) $14 \cdot 13 \cdot 12$

C) $2(6 \cdot 8 \cdot 12)$

D) $2(14 \cdot 13 \cdot 12)$

PAES INVIERNO M2-2024

FORMA 191 – 2025

47. En un torneo de tenis cada jugador juega con cada uno de los otros jugadores solo una vez.

Si se realizan 28 partidos en total, ¿cuántos jugadores participaron en este torneo?

A) 27

B) 15

C) 14

D) 8

PAES INVIERNO M2-2025

FORMA 193 – 2025

47. En una ciudad de 6000 personas, 200 miden más de $1{,}8$ metros.

Si se escogen dos personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ninguna de ellas mida más de $1{,}8$ metros?

A) $\left(\frac{1}{5800}\right)^2$

B) $\frac{5800}{6000} \cdot \frac{5799}{5999}$

C) $\frac{200}{6000} \cdot \frac{200}{6000}$

D) $\frac{5800}{6000}$

E) $2 \cdot \frac{5800}{6000}$

Definición (Medida de Probabilidad)

Sea Ω un conjunto no vacío, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una familia **adecuada** *de subconjuntos de Ω. Diremos que $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ es* **medida de probabilidad** *si satisface:*

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
3. $\forall A_1, \ldots, A_N \subset \mathcal{F}$, *tal que* $A_n \cap A_m = \emptyset$ *si* $n \neq m$, *se tiene que*

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N\right) = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(A_n).$$

Propiedades elementales de $\mathbb{P}$

1. $(\forall A \in \mathcal{F})\,,\ \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
2. $(\forall A, B \in \mathcal{F})\,,\ \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c)$.
3. $(\forall A, B \in \mathcal{F})\,,\ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

PAES INVIERNO M2-2023

FORMA 113 – 2023

65. Si se lanzan tres monedas, ¿cuál es la probabilidad de obtener al menos un sello?

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{7}{8}$

C) $\frac{1}{8}$

D) $\frac{1}{2}$

Regla de las probabilidades totales

Sea $A_1, \ldots A_N \subset \mathcal{F}$, una partición de Ω, es decir $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $m \neq n$ y $\bigcup_n A_n = \Omega$. Entonces, $\forall B \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}\left(B \cap A_n\right).$$

Espacios equiprobables

Sea $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ un conjunto finito. Sobre Ω podemos definir un espacio de probabilidad, con $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ y en el cual cada elemento tiene la misma probabilidad, es decir:

$$\forall \omega \in \Omega :, \ \mathbb{P}(\{\omega\}) = c,$$

donde $c \in [0, 1]$.

Proposición

1. $\forall \omega \in \Omega, \ \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/N.$
2. $\forall A \in \mathcal{F}, \ \mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{N} = \frac{\#A}{\#\Omega}.$

PAES Invierno M2-2024

48. El sindicato de una empresa quiere escoger una directiva compuesta por tres cargos.

Existen 8 postulantes para estos cargos, de los cuales 5 son mujeres y 3 son hombres.

Si se escogiera al azar a tres personas para estos cargos, ¿cuál es la probabilidad de que la directiva elegida esté conformada solo por mujeres?

A) $\frac{5}{28}$

B) $\frac{5}{8}$

C) $\frac{3}{8}$

D) $\frac{1}{60}$

E) $\frac{3}{5}$

Probabilidad Condicional

Si $B \in \mathcal{F}$ cumple $\mathbb{P}(B) > 0$, podemos definir:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Ejemplo

Al paquete de cartas de 32 cartas ahora se le añade los 2 comodines. Se saca una carta del mazo. Considereamos los eventos

$$A = \{\text{la carta es trebol}\},$$

$$B = \{\text{la carta es un rey}\},$$

Calcular $\mathbb{P}(B|A)$ y $\mathbb{P}(A|B)$.

Teorema de Bayes

Sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$. Entonces:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Si $\{B_i : i = 1, \ldots, N\}$ es una partición, entonces:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)$$

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\,\mathbb{P}(B_j)}{\sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)}$$

PAES M2-2025

FORMA 193 – 2025

48. Se dispone de dos cajas A y B, en A hay en total 3 fichas blancas, 2 rojas y 6 negras, en B hay en total 2 fichas blancas y 3 rojas, todas del mismo tipo.

Se define el siguiente experimento: se lanza un dado común, si el número obtenido es menor que 3, se extrae al azar una ficha de la caja A; en caso contrario, se extrae al azar una ficha de la caja B.

Si se realiza este experimento, ¿cuál es la probabilidad de extraer una ficha negra?

A) $\frac{6}{11}$

B) $\frac{1}{8}$

C) $\frac{2}{11}$

D) $\frac{3}{11}$

E) $\frac{3}{8}$

FORMA 193 – 2023

51. Considera las tiendas A, B y C dedicadas a la venta de relojes. Si un cliente compra un reloj en una de estas tres tiendas, la probabilidad de que compre en A es $0{,}2$; en B es $0{,}3$ y en C es $0{,}5$. Se sabe que la probabilidad de que cualquier reloj que se venda en las tiendas A, B y C tenga fallas es $0{,}3$; $0{,}5$ y $0{,}6$, respectivamente.

Si Teresa compra un reloj que no tiene fallas, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya comprado en la tienda A?

A) $0{,}2 \cdot 0{,}7$

B) $0{,}2 \cdot 0{,}3$

C) $$\frac{0{,}2 \cdot 0{,}3}{0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}6}$$

D) $$\frac{0{,}2 \cdot 0{,}7}{0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}4}$$

Independencia

Diremos que $A, B \in \mathcal{F}$ son independientes ($A \perp B$) si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

Proposición

1. *Si* $\mathbb{P}(A) = 0$ *o* $\mathbb{P}(A) = 1$, *entonces* $A \perp B$ *para todo* $B \in \mathcal{F}$.
2. *Si* $A \perp B$, *entonces* $A^c \perp B$, $A \perp B^c$ *y* $A^c \perp B^c$.

Independencia

Proposición

Sean dos eventos A y B, tal que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

$A, B \in \mathcal{F}$ son independientes $(A \perp B)$ Ssi

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A).$$

Ejemplo

Se tiene un juego de 32 cartas. Se saca una carta del mazo. Considereamos los eventos

$$A = \{\text{la carta es trebol}\},$$

$$B = \{\text{la carta es un rey}\},$$

¿ Los eventos A y B son independientes? _____

Ejemplo

Al paquete de cartas de 32 cartas ahora se le añade los 2 comodines. Se saca una carta del mazo. Considereamos los eventos

$$A = \{\text{la carta es trebol}\},$$

$$B = \{\text{la carta es un rey}\},$$

¿ Los eventos A y B son independientes? _____

PAES Invierno M2-2024

FORMA 191 – 2025

50. En una caja hay en total M bolitas azules y N bolitas blancas y en otra caja hay en total 3 bolitas azules y 5 bolitas blancas. Todas las bolitas de las cajas son del mismo tipo.

Si se extrae al azar una bolita de cada caja, ¿cuál de las siguientes expresiones representa la probabilidad de que ambas sean azules?

A) $\dfrac{M+3}{M+N+8} \cdot \dfrac{M+2}{M+N+7}$

B) $\dfrac{M+3}{M+N+8} + \dfrac{M+2}{M+N+7}$

C) $\dfrac{M}{M+N} + \dfrac{3}{8}$

D) $\dfrac{M}{M+N} \cdot \dfrac{3}{8}$

Definición (Variable Aleatoria)

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad, una* **variable aleatoria** X *es una función definida en* Ω *y que toma valores en* $\mathbb{R}$. *Es decir,*

$$X : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Ejemplo:

Consideremos el experimento de lanzar 4 monedas equilibradas. Si X el número de caras obtenidas, entonces X es una variable aleatoria.

Ejemplo:

Consideremos el experimento de lanzar 2 dados equilibrados. Si Z es la suma de los números obtenidos en la cara superior de cada dado, entonces Z es una variable aleatoria.

Variables aleatorias discretas

Definición (Variable Aleatoria Discreta)

Una v.a. X se dirá discreta, si toma un numero finito o numerable de valores $a_1, a_2 \ldots,$

Proposición

Si X es una variable discreta que toma los valores $a_1, a_2 \ldots,$ se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(X = a_n\right) = 1.$$

Función de masa de probabilidad

Dada una v.a. discreta X, llamaremos **función de masa de probabilidad**, la que denotaremos por $p_X : \mathbb{R} \to \infty$, a la función dada por

$$p_X(a) = \mathbb{P}(X = a).$$

Ejemplo

Sea X la variable aleatoria discreta que tiene la siguiente función de masa de probabilidad

k	2	4	6	8	10	12
$\mathbb{P}(X = k)$	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/32

Calcule:

- La probabilidad de que X sea menor que 9.
- La probabilidad de que X sea mayor que 5.
- la probabilidad de que X sea mayor que 7, pero menor que 11.

Ejemplo

Encuentre la función de masa de probabilidad de las variables aleatorias X y Z de los ejemplos anteriores.

Variables clásicas: Bernoulli

Definición

Diremos que X es una v.a. de Bernoulli de parámetro $p \in [0,1]$ si

$$p_X(k) = (1-p)^{1-k} p^k, \ k \in \{0,1\}.$$

Ensayo Bernoulli de parámetro p: un experimento tiene dos resultados posibles: exito (1) y fracaso (0).

$$\mathbb{P}(\textit{exito}) = \mathbb{P}(X = 1) = p$$

$$\mathbb{P}(\textit{fracaso}) = \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

Ejemplo: el resultado del lanzamiento de una moneda, estado defectuoso o no-defectuoso de una pieza mecanica.....

Variables clásicas: Binomial

Definición

Diremos que X es una v.a. Binomial de parámetros $n \geq 1$ y $p \in [0,1]$ si

$$p_X(k) = \binom{n}{k}(1-p)^{n-k}p^k, \ k \in \{0,1,\ldots,n\}.$$

Uso: cuando se repite de manera independiente n ensayos Bernoulli de parametro p y X es el numero de exitos dentro de los n ensayos.

Variables clásicas: Binomial

Definición

Diremos que X es una v.a. Binomial de parámetros $n \geq 1$ y $p \in [0,1]$ si

$$p_X(k) = \binom{n}{k}(1-p)^{n-k}p^k, \ k \in \{0,1,\ldots,n\}.$$

Uso: cuando se repite de manera independiente n ensayos Bernoulli de parametro p y X es el numero de exitos dentro de los n ensayos.

Ejemplo: se lanzan $n = 5$ veces una moneda. Los lanzamientos sont independientes. Sea X el numero de caras dentro de los 5 lanzamientos.

Variables clásicas: Binomial

Definición

Diremos que X es una v.a. Binomial de parámetros $n \geq 1$ y $p \in [0,1]$ si

$$p_X(k) = \binom{n}{k}(1-p)^{n-k}p^k, \ k \in \{0,1,\ldots,n\}.$$

Uso: cuando se repite de manera independiente n ensayos Bernoulli de parametro p y X es el numero de exitos dentro de los n ensayos.

Ejemplo: se lanzan $n = 5$ veces una moneda. Los lanzamientos sont independientes. Sea X el numero de caras dentro de los 5 lanzamientos.

X tiene distribución Binomial de parámetro $n = 5$ y $p = 1/2$.

Variables clásicas: Binomial

Ejemplo: se lanzan $n = 10$ veces un dado. Los lanzamientos sont independientes. Sea X el numero de seis dentro de los 10 lanzamientos.

Variables clásicas: Binomial

Ejemplo: se lanzan $n = 10$ veces un dado. Los lanzamientos sont independientes. Sea X el numero de seis dentro de los 10 lanzamientos.

X tiene distribución Binomial de parámetro $n = 10$ y $p = 1/6$.

PAES Invierno M2-2025

FORMA 193 – 2025

51. Una persona desarrolla un test de 10 preguntas, el cual solo tiene preguntas de verdadero o falso.

Si esta persona contestó todas las preguntas al azar y el test se aprueba al obtener al menos 7 respuestas correctas, ¿cuál es la probabilidad de que la persona apruebe el test?

A) $\left(\frac{1}{2}\right)^7$

B) $\binom{10}{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7$

C) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 + \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

D) $\binom{10}{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 + \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$