Ejemplo

Consideremos que en un curso hay 25 estudiantes locales y 5 estudiantes de intercambio. ¿Cuántos grupos de 6 integrantes es posible formar si en cada grupo debe haber exactamente un estudiante de intercambio?

Experimento 1

Rellenar el cupo del estudiante de intercambio

5 maneras posibles

Experimento 2

Rellenar los 5 cupos restantes

$\binom{25}{5}$ maneras distintos

Hay $5 \times \binom{25}{5}$ grupos de 6 estudiantes

PAES Invierno M2-2024

46. Se quiere formar un comité de tres personas: un representante, un secretario y un tesorero, desde un grupo de seis mujeres y ocho hombres.

¿Cuántos grupos distintos se pueden formar si el representante debe ser mujer y el secretario debe ser un hombre?

A) $6 \cdot 8 \cdot 12$

B) $14 \cdot 13 \cdot 12$

C) $2(6 \cdot 8 \cdot 12)$

D) $2(14 \cdot 13 \cdot 12)$

Exp 1
Rellenar el cupo del representante

Exp 2
Rellenar el cupo secretario

Exp 3
rellenar el cupo de tesorero

$6 \times 8 \times 12$

PAES INVIERNO M2-2024

FORMA 191 – 2025

47. En un torneo de tenis cada jugador juega con cada uno de los otros jugadores solo una vez.

Si se realizan 28 partidos en total, ¿cuántos jugadores participaron en este torneo?

A) 27
B) 15
C) 14
D) 8

Sea n = numero de jugadores.

$$\binom{n}{2} = 28$$

$28 = \frac{n(n-1)}{2}$

$56 = n(n-1)$

$n = 8$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}\,2!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

PAES INVIERNO M2-2025

FORMA 193 – 2025

47. En una ciudad de 6000 personas, 200 miden más de $1{,}8$ metros.

Si se escogen dos personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ninguna de ellas mida más de $1{,}8$ metros?

A) $\left(\frac{1}{5800}\right)^2$

B) $\frac{5800}{6000} \cdot \frac{5799}{5999}$

C) $\frac{200}{6000} \cdot \frac{200}{6000}$

D) $\frac{5800}{6000}$

E) $2 \cdot \frac{5800}{6000}$

Hay 5800 que miden menos de 1,8 m

A = Pas e miden menos de 1,8 m.

$$\frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\binom{5800}{2}}{\binom{6000}{2}} = \frac{\frac{5800 \times 5799}{2!}}{\frac{6000 \times 5999}{2!}}$$

Definición (Medida de Probabilidad)

Sea Ω un conjunto no vacío, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una familia **adecuada** *de subconjuntos de Ω. Diremos que $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ es* **medida de probabilidad** *si satisface:*

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
3. $\forall A_1, \ldots, A_N \subset \mathcal{F}$, *tal que* $A_n \cap A_m = \emptyset$ *si* $n \neq m$, *se tiene que*

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N\right) = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(A_n).$$

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A_1 = \{\text{obtener par}\} = \{2, 4, 6\}$$

$$A_2 = \{\text{obtener impar}\} = \{1, 3, 5\}$$

$$A_3 = \{\text{obtener 3}\} = \{3\}$$

$$P[A_1] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P[A_3] = \frac{1}{6}$$

$$P[A_1 \cup A_3] = \frac{4}{6}$$

$$\frac{4}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6}$$

$$P[A_1 \cup A_3] = P[A_1] + P[A_3]$$

$$A_1 \cup A_3 = \{2, 3, 4, 6\}$$

$$A_1 \cap A_3 = \emptyset$$

$$A_2 = \{1, 3, 5\}$$

$$A_3 = \{3\}$$

$$A_2 \cap A_3 = \{3\}$$

$$P[A_2] = \frac{3}{6} \quad P[A_3] = \frac{1}{6}$$

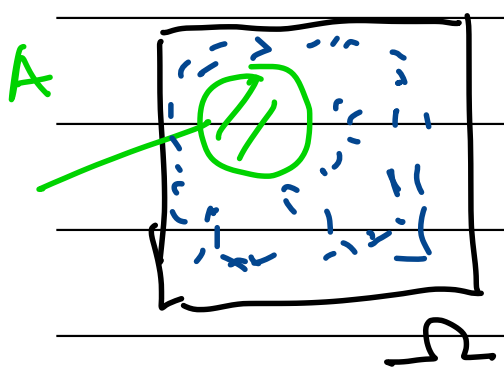
$$A_2 \cup A_3 = \{1, 3, 5\}$$

$$P[A_2 \cup A_3] = P[\{1, 3, 5\}] = \frac{3}{6}$$

$$\neq P[A_2] + P[A_3]$$

Propiedades elementales de $\mathbb{P}$

1. $(\forall A \in \mathcal{F})\,,\ \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
2. $(\forall A, B \in \mathcal{F})\,,\ \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c)$.
3. $(\forall A, B \in \mathcal{F})\,,\ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

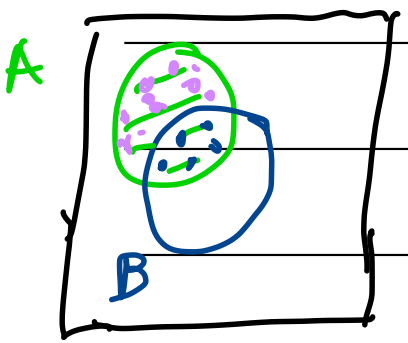


$A = \boxed{}$

$A^c = \boxed{}$

$P[A^c] = P[\Omega] - P[A]$

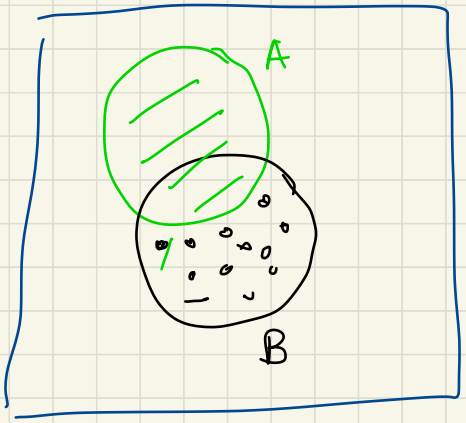
$= 1 - P[A]$



$\boxed{}$

$P[A] = P[A \cap B] + P[A \cap B^c]$

$\boxed{}$ $\boxed{}$



$$A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$$

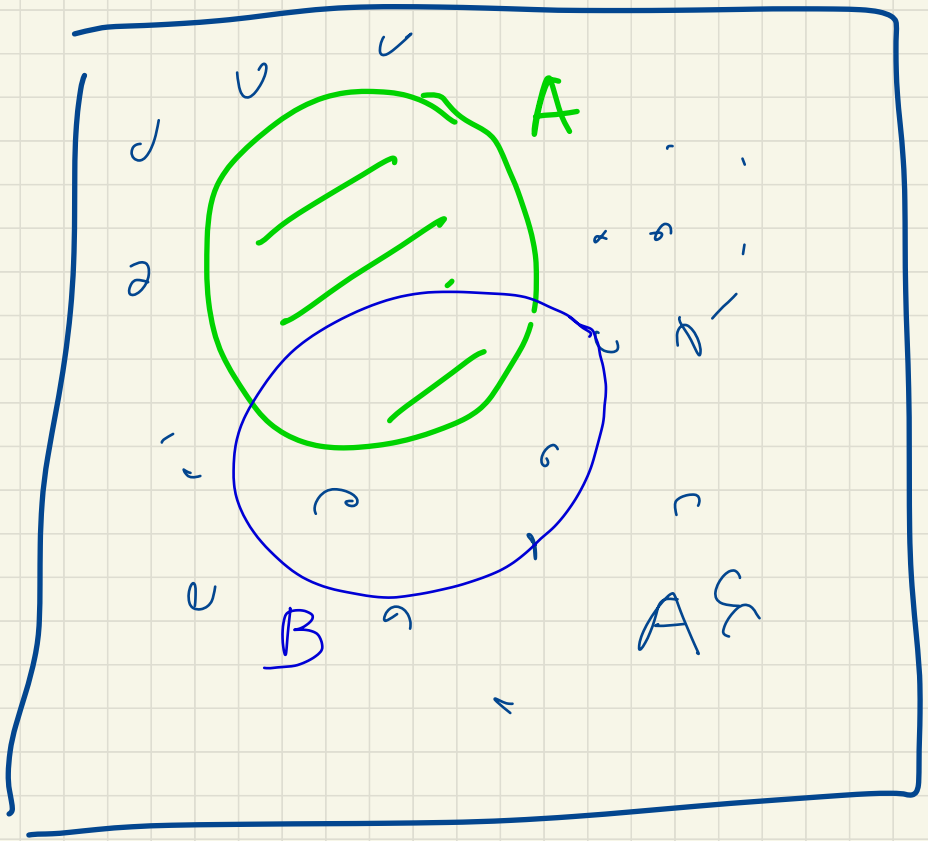
$$A_1 = A$$

$$A_2 = B \cap A^c$$

$$A_1 \cap A_2 = \phi$$

$$P(A \cup B) = P(A_1 \cup A_2) = P[A_1] + P[A_2] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

$$\therefore \; P[A_2] = P[B] - P[A \cap B]$$





A



A^C

$A_2 = B \cap A^C$

PAES INVIERNO M2-2023

FORMA 113 – 2023

65. Si se lanzan tres monedas, ¿cuál es la probabilidad de obtener al menos un sello?

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{7}{8}$

C) $\frac{1}{8}$

D) $\frac{1}{2}$

A = "al menos un sello"

A^c = "ningun sello" $= \{ccc\}$

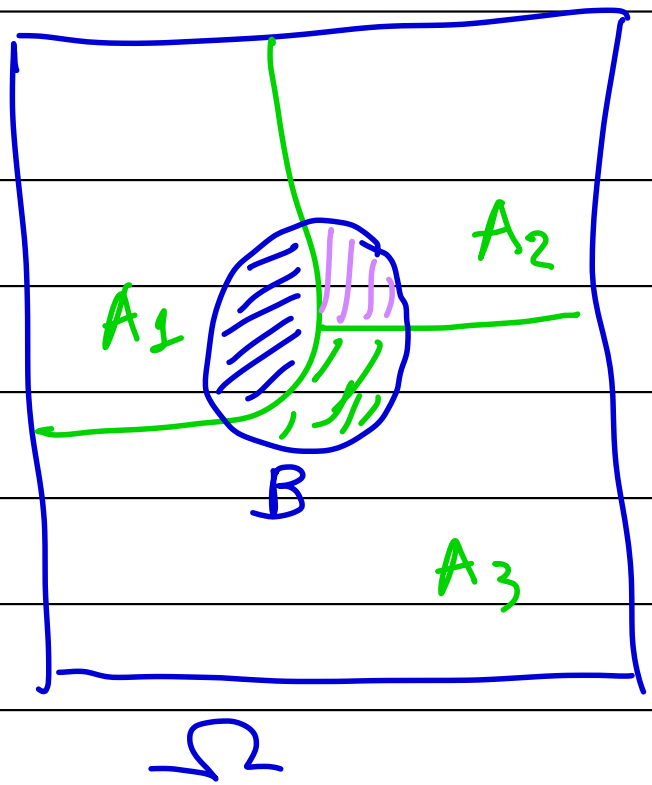
$P[A^c] = \frac{1}{8}$

$P[A] = 1 - P[A^c] = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

Regla de las probabilidades totales

Sea $A_1, \dots A_N \subset \mathcal{F}$, una partición de Ω, es decir $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $m \neq n$ y $\bigcup_n A_n = \Omega$. Entonces, $\forall B \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}\left(B \cap A_n\right).$$



$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$

$A_1 \cap A_2 = \emptyset \quad A_1 \cap A_3 = \emptyset$

$A_2 \cap A_3 = \emptyset$

$P[B] = P[B \cap A_1] + P[B \cap A_2]$

$+ P[B \cap A_3]$

$B \cap A_1 =$

$B \cap A_2$

$B \cap A_3 =$

Espacios equiprobables

Sea $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ un conjunto finito. Sobre Ω podemos definir un espacio de probabilidad, con $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ y en el cual cada elemento tiene la misma probabilidad, es decir:

$$\forall \omega \in \Omega :, \ \mathbb{P}(\{\omega\}) = c,$$

donde $c \in [0, 1]$.

$\Omega = \{c, s\}$

$N = 2$

$P[c] = \frac{1}{2}$ $P[s] = \frac{1}{2}$

Proposición

1. $\forall \omega \in \Omega, \ \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/N.$
2. $\forall A \in \mathcal{F}, \ \mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{N} = \frac{\#A}{\#\Omega}.$

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $P[\{1\}] = 1/6$

PAES Invierno M2-2024

48. El sindicato de una empresa quiere escoger una directiva compuesta por tres cargos.

Existen 8 postulantes para estos cargos, de los cuales 5 son mujeres y 3 son hombres.

Si se escogiera al azar a tres personas para estos cargos, ¿cuál es la probabilidad de que la directiva elegida esté conformada solo por mujeres?

A) $\frac{5}{28}$

B) $\frac{5}{8}$

C) $\frac{3}{8}$

D) $\frac{1}{60}$

E) $\frac{3}{5}$

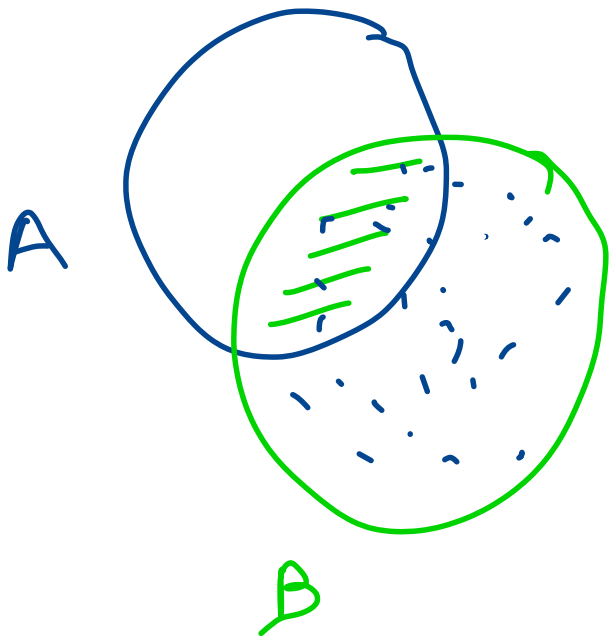
$$\frac{5 \times 4 \times 3}{2 \times 8 \times 7 \times 6 \; 2}$$

$$\frac{\binom{5}{3}}{\binom{8}{3}}$$

Probabilidad Condicional

Si $B \in \mathcal{F}$ cumple $\mathbb{P}(B) > 0$, podemos definir:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$



Ejemplo

Al paquete de cartas de 32 cartas. Se saca una carta del mazo. Considereamos los eventos

$$A = \{\text{la carta es trebol}\},$$

$$B = \{\text{la carta es un rey}\},$$

Calcular $\mathbb{P}(B|A)$ y $\mathbb{P}(A|B)$.

$P[B|A] = \frac{P[B \cap A]}{P[A]}$ $\qquad$ $P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$

$P[A] = \frac{8}{32}$ $\qquad$ $= \frac{1/32}{4/32} = \frac{1}{4}$

$P[B] = \frac{4}{32}$ $\qquad$ $P[B|A] = \frac{1/32}{8/32} = \frac{1}{8}$

$P[A \cap B] = \frac{1}{32}$

Teorema de Bayes

Sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$. Entonces:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Si $\{B_i : i = 1, \ldots, N\}$ es una partición, entonces:

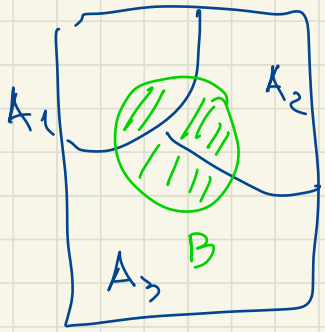
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)$$

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\,\mathbb{P}(B_j)}{\sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)}$$

$P[B|A] = \frac{P[B \cap A]}{P[A]} = \frac{P[A|B] \times P[B]}{P[A]}$

$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} \Rightarrow P[A \cap B] = P[A|B] \times P[B]$

Regla de probabilidades totales



$$P[B] = P[B \cap A_1] + P[B \cap A_2] + P[B \cap A_3]$$

$$P[B] = P[B/A_1]P[A_1] + P[B/A_2]P[A_2] + P[B/A_3]P[A_3]$$

PAES M2-2025

FORMA 193 – 2025

48. Se dispone de dos cajas A y B, en A hay en total 3 fichas blancas, 2 rojas y 6 negras, en B hay en total 2 fichas blancas y 3 rojas, todas del mismo tipo.

Se define el siguiente experimento: se lanza un dado común, si el número obtenido es menor que 3, se extrae al azar una ficha de la caja A; en caso contrario, se extrae al azar una ficha de la caja B.

Si se realiza este experimento, ¿cuál es la probabilidad de extraer una ficha negra?

A) $\frac{6}{11}$

B) $\frac{1}{8}$

C) $\frac{2}{11}$

D) $\frac{3}{11}$

E) $\frac{3}{8}$

B = "extraer una ficha negra"

A_1 = "el numero es menor que 3"

A_2 = "el numero es mayor o igual a 3"

$A_1 \cup A_2 = \Omega \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$$P[B] = P[B \cap A_1] + P[B \cap A_2] = P[B|A_1]P[A_1] + P[B|A_2]P[A_2]$$

B = "sacar una ficha negra"

A_1 = "el numero es menor que 3"

A_2 = "el numero es mayor o igual a 3"

$$P[A_1] = \frac{2}{6}$$

$$P[A_2] = \frac{4}{6}$$

$$P[B/A_1] = \frac{6}{11}$$

$$P[B/A_2] = 0$$

$$P[B] = P[B/A_1]\,P[A_1] + P[B/A_2]\,P[A_2]$$

$$= \frac{6}{11} \times \frac{2}{6} = \frac{2}{11}$$

PAES M2-2023

FORMA 193 – 2023

51. Considera las tiendas A, B y C dedicadas a la venta de relojes. Si un cliente compra un reloj en una de estas tres tiendas, la probabilidad de que compre en A es $0{,}2$; en B es $0{,}3$ y en C es $0{,}5$. Se sabe que la probabilidad de que cualquier reloj que se venda en las tiendas A, B y C tenga fallas es $0{,}3$; $0{,}5$ y $0{,}6$, respectivamente.

Si Teresa compra un reloj que no tiene fallas, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya comprado en la tienda A?

A) $0{,}2 \cdot 0{,}7$

B) $0{,}2 \cdot 0{,}3$

C) $\dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}3}{0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}6}$

D) $\dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}7}{0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}4}$

Ejercicio casa !