

Notas de un curso de Álgebra
Ingeniería Civil Matemática

Gerardo Honorato
Universidad de Valparaíso

ÍNDICE

1. Lógica	4
1.1. Propositiones y conectivos lógicos	4
1.2. Tautologías, contradicciones y contingencias	8
1.3. Leyes del álgebra de proposiciones	8
1.4. Leyes de Absorción	10
1.4.1. Cuantificadores	11
1.4.2. Negación de función proposicional cuantificada	12
1.5. Ejercicios (algunos resueltos)	12
2. Demostración e Inducción Matemática	16
2.1. Métodos de demostración	16
2.2. Inducción matemática	17
3. Teoría de Conjuntos	23
3.1. Conjuntos	23
3.2. Operaciones con conjuntos	24
3.2.1. Relaciones entre vacío y universo	25
3.3. Producto cartesiano y conjunto potencia	29
3.4. Ejercicios	30
4. Geometría Analítica	32
4.1. Línea recta	32
4.1.1. Distancia definida por el valor absoluto	32
4.1.2. Punto Medio	32
4.1.3. Forma Punto-Pendiente de la ecuación de la recta	33
4.1.4. Ecuación general de la recta	34
4.2. La parábola	38
4.2.1. Parábola con vértice en $(0,0)$	39
4.2.2. Parábola de vértice (h,k) y eje paralelo a un eje coordenado	40
4.3. La circunferencia	43

4.3.1.	Forma general de la circunferencia	45
4.4.	La elipse	47
4.4.1.	Ecuación de la elipse con centro en el origen . . .	48
4.5.	La hipérbola	51
4.5.1.	Asíntotas	54
5.	Trigonometría	58
5.1.	Razones trigonométricas	58
5.2.	Identidad fundamental y fórmulas de adición	60
5.3.	Ley de senos y ley de cosenos	63
5.4.	Ejercicios	65

LÓGICA

§1.1 Proposiciones y conectivos lógicos

La **lógica** es la ciencia que estudia los principios formales del razonamiento. Es una disciplina que por medio de reglas y técnicas determina si un argumento es válido o no.

Una **proposición** es toda expresión que declara un hecho, y de la que puede decirse que es Verdadera (V) o Falsa (F), pero no ambas.

EJEMPLO 1.1. Veamos algunos ejemplos de proposiciones que pueden ser verdaderas o falsas:

- (a) La proposición “Carlos Pezoa Véliz fue un poeta chileno”, es verdadera.
- (b) La proposición “Emmy Noether fue una matemática alemana”, es verdadera.
- (c) La proposición “Benjamin Franklin descubrió Brasil”, es falsa.
- (d) $3 + 2 = 1$ es falsa.

EJEMPLO 1.2.

- (a) No es una proposición “los números mayores que 4 son verdes”, ya que NO corresponde decidir (en general) si es verdadera o falsa.
- (b) ¿Cómo has estado? no es una proposición, ya que no corresponde decir si es (V) o (F).
- (c) $x + y = 1$ no es una proposición, ya que no es (V) ni (F).

Una **función proposicional** (o **proposición abierta**) en una variable “ x ” sobre un conjunto S es una frase que se transforma en proposición cuando x es sustituido por un elemento del conjunto S .

EJEMPLO 1.3.

- (1) “ x es un poeta” no quiere decir nada hasta que se asigna un valor a ‘ x ’. Según el valor, la proposición tiene un valor V o F .
- (2) x es un número positivo. $p(x)$; $p(1)$ es V .
- (3) x es un número primo. $q(x)$; $q(4)$ es F .
- (4) $2x + 1 > 3$. $r(x)$; $r(0)$ es F .

Observación. Las proposiciones lógicas serán denotadas por las letras $p, q, r, s, \dots$

El **valor de verdad** de una proposición es la veracidad o falsedad de ésta, i.e., V o F . Asumamos que cada proposición tiene un valor de verdad, esto es, es V o F . El valor de verdad de una proposición verdadera es V y el valor de verdad de una proposición falsa es F .

Los **conectivos lógicos** son símbolos que nos permiten vincular dos o más proposiciones generando una nueva proposición. Una proposición es **simple** si no está afectada por conectivos lógicos; en otro caso es **compuesta**. Una **tabla de verdad** es la tabla que contiene los valores de verdad de una proposición compuesta.

Tabla		
Conectivo lógico	Símbolo	Terminología
Negación	$\neg, \sim$	No
Conjunción	$\wedge$	y
Disyunción	$\vee$	o
Condicional	$\Rightarrow$	Implica, entonces
Bicondicional	$\Leftrightarrow$ o $\equiv$	Si y sólo si, o equivalencia

Ahora construiremos e introduciremos las tablas de verdad de cada uno de los conectivos lógicos.

NEGACIÓN. Dada una proposición p , su negación (no p) forma una nueva proposición, denotada por $\sim p$ o $\bar{p}$.

Negación	
p	$\sim p$
V	F
F	V

CONJUNCIÓN.

Conjunción		
p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

EJEMPLO.

- (a) $(1 < 2) \wedge (2 \neq 3)$ es V .
- (b) $(4 = 7) \wedge (9 \neq 9)$ es F .
- (c) $(1 < 2) \wedge (\text{los perros dicen miau})$ es F .

DISYUNCIÓN.

Disyunción		
p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

CONDICIONAL.

Condicional		
p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

EJEMPLO 1.4. Aunque apócrifa, la siguiente historia es interesante. El famoso matemático inglés G.H. Hardy (el profesor del aún más famoso matemático S. Ramanujan de la película “el hombre que conocía el infinito”) se encontraba cenando, y en la misma mesa estaba J. McTaggart (filósofo inglés), quien le preguntó a Hardy:

“si dos veces dos es igual a cinco, ¿cómo demuestras que yo soy el papa?”

Hardy respondió:

“si dos veces dos es cuatro, entonces $4 = 5$. Restemos 3 y obtenemos $1 = 2$. Pero McTaggart y el papa son dos, por lo tanto, McTaggart y el papa son uno.”

MÁS EJEMPLOS.

(a) $2 < 3 \Rightarrow 1 \neq 2$ es V .

(b) $2 < 3 \Rightarrow 1 = 2$ es F .

BICONDICIONAL. $\Leftrightarrow$ o $\equiv$.

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p).$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

DISYUNCIÓN EXCLUSIVA. $p \vee q$ (“o p o q , pero no ambos”; también se escribe $p \oplus q$) es verdadera exactamente cuando p y q tienen valores de verdad distintos.

Disyunción exclusiva		
p	q	$p \vee q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Observación. Las posibilidades de combinar valores de verdad dependen del número “ n ” de proposiciones simples dadas y es igual a 2^n .

EJEMPLO.

p : el gato es peludo. q : el gato es bonito.

- (a) $p \wedge q$: el gato es peludo y bonito.
 (b) $p \vee \bar{q}$: el gato es peludo o no es bonito.
 (c) $\overline{(p \vee q)}$: no ocurre que el gato es pelado o bonito.
 (d) $\bar{p} \wedge \bar{q}$: el gato no es peludo ni bonito.

§1.2 Tautologías, contradicciones y contingencias

Según el resultado que se obtenga con el operador lógico de mayor jerarquía, las proposiciones compuestas se clasifican de la siguiente forma.

- TAUTOLOGÍA. Es toda proposición compuesta cuyo valor de verdad es VERDADERO.
- CONTRADICCIÓN O ABSURDO. Es toda proposición compuesta cuyo valor de verdad es FALSO.
- CONTINGENCIA. Es toda proposición compuesta cuyo valor de verdad está formado siempre por VERDADERO Y FALSO.

Ejercicio. Escribir la tabla de verdad de

$$\underbrace{[(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow q]}_{(1)} \Rightarrow \underbrace{[p \Rightarrow q]}_{(2)}.$$

p	q	$\bar{q}$	$p \wedge \bar{q}$	$p \wedge \bar{q} \Rightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$(1) \Rightarrow (2)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V

Es tautología!

§1.3 Leyes del álgebra de proposiciones

Para nosotros, $\equiv$ es lo mismo que $\Leftrightarrow$.

- (0) $[p \Rightarrow q] \Leftrightarrow [\bar{q} \Rightarrow \bar{p}]$ (la oración completa es una tautología).

PRINCIPALES

- (1) $[p \Rightarrow q] \Leftrightarrow [\bar{p} \vee q]$.
- (2) $[p \Rightarrow q] \Leftrightarrow [(\overline{p \wedge \bar{q}})]$.
- (3) $(\overline{\bar{p}}) \Leftrightarrow p$ (doble negación).

CONMUTATIVIDAD

- (4) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$.
- (5) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$.
- (6) $p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$.

ASOCIATIVIDAD

- (7) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$.
- (8) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$.
- (9) $[(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r] \Leftrightarrow [p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)]$.

DISTRIBUTIVIDAD

- (10) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.
- (11) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

LEYES DE DE MORGAN (*Augustus De Morgan*)

- (12) $(\overline{p \wedge q}) \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$.
- (13) $(\overline{p \vee q}) \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$.

IDEMPOTENCIAS

- (14) $p \wedge p \Leftrightarrow p$.
- (15) $p \vee p \Leftrightarrow p$.

LEYES DE IDENTIDAD

- (16) $p \vee F \Leftrightarrow p$.
- (17) $p \wedge F \Leftrightarrow F$.

$$(18) p \vee V \Leftrightarrow V.$$

$$(19) p \wedge V \Leftrightarrow p.$$

§1.4 Leyes de Absorción

$$(1) p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p.$$

$$(2) p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p.$$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$	$p \wedge (p \vee q)$	$p \vee q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F

EJEMPLOS.

- (1) Ilustremos la propiedad (1) del álgebra de proposiciones, $[p \Rightarrow q] \Leftrightarrow [\bar{p} \vee q]$. Sean p = “es menor de edad” y q = “entra con un adulto”. Entonces

$$\underbrace{\text{“si es menor de edad, entonces entra con un adulto”}}_{p \Rightarrow q}$$

es lo mismo que

$$\underbrace{\text{“es mayor de edad, o entra con un adulto”}}_{\bar{p} \vee q},$$

ya que $\bar{p}$ = “no es menor de edad” = “es mayor de edad”.

- (2) Sea $a \in \mathbb{N}$. Si a^2 es natural impar, entonces a es impar.
Sea p = “ a^2 es natural impar” y q = “ a es impar”: $p \Rightarrow q$.

Demostración. $(p \Rightarrow q) \equiv (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$. Supongamos que a es par. Luego, $\exists \hat{k} \in \mathbb{N}$ tal que $a = 2\hat{k}$. Elevando al cuadrado, $a^2 = 4\hat{k}^2 = 2 \cdot (2\hat{k}^2) = 2k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Esto implica que a^2 es par. ■

- (3) Demuestre: $\{[(p \wedge q) \Rightarrow r] \wedge [(\bar{p} \vee r) \Rightarrow \bar{q}]\} \Rightarrow \bar{q}$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
 & [(p \wedge q) \Rightarrow r] \wedge [(\bar{p} \vee r) \Rightarrow \bar{q}] \\
 & \equiv [\overline{(p \wedge q)} \vee r] \wedge [\overline{(\bar{p} \vee r)} \vee \bar{q}] \\
 & \quad \text{ya que } [p \Rightarrow q] \Leftrightarrow [\bar{p} \vee q] \\
 & \equiv [(\bar{p} \vee \bar{q}) \vee r] \wedge [(p \wedge \bar{r}) \vee \bar{q}] \quad (\text{De Morgan}) \\
 & \equiv [(\bar{p} \vee r) \wedge (p \wedge \bar{r})] \vee \bar{q} \quad (\text{asociat. y distrib.}) \\
 & \equiv \underbrace{[(\bar{p} \vee r) \wedge (\bar{p} \vee r)]}_{F} \vee \bar{q} \\
 & \Rightarrow \bar{q}. \quad \square
 \end{aligned}$$

§1.4.1 Cuantificadores

Llamaremos **variable** a un símbolo que puede ser sustituido por cualquier elemento del universo ($= U$) o parte de él. Notación: $x, y, z, w, x_1, x_2, y_1, y_2, \dots$

EJEMPLOS.

- (1) Sea $U = \mathbb{N}$ y $p(x) : x^2 - 1 = 0$. Esta es una función proposicional ya que $p(1)$ es V y $p(x)$ es F cuando $x \neq 1$.
- (2) Sea $U = \{1, 2, -1, -2\}$ y $p(x) : x^2 > 0$. Esta es una función proposicional ya que $p(x)$ es siempre V .
- (3) Sea $U = \mathbb{Z}$ y $p(x) : 2x + 3$. No es una función proposicional.

DEFINICIÓN 1.5.

- (1) **Cuantificador existencial:** $(\exists)$. $(\exists x \in U), (p(x))$: “Existe $x \in U$ tal que ocurre $p(x)$ ”. EJEMPLO. $\exists x \in U = \{-1, 2, 0\}; (p(x) : x^2 - 1 = 0), V$.
- (2) **Cuantificador Universal:** $(\forall)$. $(\forall x \in U), (p(x))$: “Para todo x en U ocurre $p(x)$ ”. EJEMPLO. “Todo número real es mayor que 5”: $\forall x \in \mathbb{R}, p(x) : x > 5$, Falso.
- (3) **Cuantificador existencial único:** $(\exists!)$. $(\exists! x \in U), (p(x))$: “Existe un único x en U tal que ocurre $p(x)$ ”. EJEMPLO. $\exists! x \in \mathbb{N} : x^2 - 1 = 0$ (V , con $x = 1$).

§1.4.2 Negación de función proposicional cuantificada

$$(1) \overline{(\forall x \in U)(p(x))} \equiv (\exists x \in U)(\overline{p(x)}).$$

$$(2) \overline{(\exists x \in U)(p(x))} \equiv (\forall x \in U)(\overline{p(x)}).$$

EJEMPLOS.

$$(1) \overbrace{(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \geq 0)}^F \equiv \underbrace{(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 < 0)}_F.$$

$$(2) \overline{(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 = 1)} \equiv \underbrace{(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \neq 1)}_F.$$

§1.5 Ejercicios (algunos resueltos)

- (1) Construya la tabla de verdad de $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	F

Contradicción!

- (2) Verifique que $[(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow q] \Rightarrow [p \Rightarrow q]$ es una tautología.

Solución. Esto es equivalente a $[(\overline{p \wedge \bar{q}}) \vee q] \Rightarrow [\bar{p} \vee q]$, que es equivalente a $\bar{p} \vee (q \vee q) \Rightarrow \bar{p} \vee q$, que a su vez es equivalente a $(\bar{p} \vee q) \Rightarrow (\bar{p} \vee q)$, esto es, $[r \Rightarrow r] \equiv V$. ■

- (3) Si el cuadrado de un número entero es par, entonces el número es par.

Solución. Sea $a \in \mathbb{Z}$. Si a es impar, entonces $a = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$, luego $a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, por lo tanto a^2 es impar. ■

- (4) Discuta: Si el cuadrado de un número es par, entonces el número es par.

Falso: $a^2 = 6 \Rightarrow a = \sqrt{6}$, que no es par. *Moraleja:* En ocasiones es necesario ser más específico; podemos agregar que el número sea *entero*.

- (5) TAREA. El cuadrado de un número entero a es impar si y solamente si a es impar.
- (6) Discuta: Si el cuadrado de un número es impar entonces el número es impar.
- (7) $\sqrt{2}$ no es racional.

Solución 1. Si $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ y $(p, q) = 1$, entonces $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2$ es par $\Rightarrow p$ es par, $\Rightarrow p = 2m$ para algún m , $\Rightarrow 4m^2 = 2q^2 \Rightarrow 2m^2 = q^2 \Rightarrow q^2$ es par $\Rightarrow q$ es par, $\therefore (p, q) = 2 \rightarrow \leftarrow$.

Solución 2. Supongamos que q es el menor entero tal que $\sqrt{2} = p/q$, entonces $1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow q < p < 2q$, restamos q : $\Rightarrow 0 < p - q < q$. Por otro lado $2q^2 = p^2 \Rightarrow 2q^2 - pq = p^2 - pq \Rightarrow q(2q - p) = p(p - q) \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{2q - p}{p - q} = \sqrt{2}$. Luego $p - q$ es menor, $\rightarrow \leftarrow$.

- (8) ¿Si la proposición p es verdadera y $[(\bar{p} \vee q) \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)] \vee (q \wedge s)$ es falsa, entonces q, r, s son:?

Solución. Recordemos que si $a \vee b \equiv F \Rightarrow (a \equiv F) \wedge (b \equiv F)$:

a	b	$a \vee b$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

lo que implica que

$$\underbrace{[(\bar{p} \vee q) \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)]}_{F \text{ (1)}} \vee \underbrace{(q \wedge s)}_{F \text{ (2)}}.$$

De (1): $\underbrace{\bar{p} \vee q}_{V \text{ (3)}} \Rightarrow \underbrace{(q \Leftrightarrow r)}_{F \text{ (4)}}$. De (3): $F \vee q \equiv V \Rightarrow \underline{q \equiv V}$. De (4):

$\underline{r = F}$. Finalmente, de (2): $\underline{s = F}$. ■

- (9) Simplifique al máximo las siguientes proposiciones y decida si son tautologías, contradicciones o contingencias.

(a) $(p \Rightarrow \bar{q}) \Rightarrow (\overline{p \wedge q})$.

$$\begin{aligned} (p \Rightarrow \bar{q}) \Rightarrow (\overline{p \wedge q}) &\equiv \overline{(p \Rightarrow \bar{q}) \vee p \wedge q} \\ &\equiv \overline{(\bar{p} \vee \bar{q}) \vee p \wedge q} \equiv \overline{(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})} \quad (\text{De Morgan}) \\ &\equiv s \vee \bar{s}. \quad \text{Tautología.} \end{aligned}$$

- (b) Si $(\bar{p} \vee q \vee s) \wedge [(p \wedge s) \Rightarrow r] \wedge \bar{q} \equiv V$ entonces $\bar{r} \Rightarrow [(\bar{p} \vee \bar{s} \vee r) \vee (p \wedge \bar{s})] \equiv ?$

Solución. Si $\text{algo} \wedge \text{algo} \wedge \text{algo} \equiv V$, entonces cada “algo” es V :

- (1) $(\bar{p} \vee q \vee s) \equiv V$; (2) $[(p \wedge s) \Rightarrow r] \equiv V$; (3) $(q = F)$.

$$\begin{aligned} &r \vee [(\bar{p} \vee \bar{s} \vee r) \vee (p \wedge \bar{s})] \\ &\equiv r \vee [(\overline{p \wedge s} \vee r) \vee \bar{p} \vee \bar{s}] \\ &\equiv r \vee [(p \wedge s \Rightarrow r) \vee \bar{p} \vee s \vee \underbrace{q}_F] \quad (\text{identidad}) \\ &\equiv r \vee [V \vee \bar{V}] = r \vee V \equiv V \quad (\text{dominación}). \end{aligned}$$

Es una tautología

EJERCICIO. $\overbrace{((p \vee q) \wedge \bar{p}) \Rightarrow q}$; (propiedad de silogismo disyuntivo). Hacer la tabla de verdad. Un ejemplo: esta pelota es de plástico o cuero; no es de plástico, ¿qué se puede concluir? Respuesta: es de cuero. ¿Se nota la propiedad?

p	q	$p \vee q$	$\bar{p}$	$(p \vee q) \wedge \bar{p}$	$(p \vee q) \wedge \bar{p} \Rightarrow q$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V

EJERCICIO. Demuestre que $\overline{(p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q)} \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$.

Solución.

$$\overline{(p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q)} \equiv (\bar{p} \vee q) \wedge (p \vee \bar{q}) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (p \Leftrightarrow q). \quad \square$$

EJERCICIO.

1. Determine el valor de verdad de $\forall m \in \mathbb{Z}^+, \exists n \in \mathbb{Z}^+, 2n = m$.
 F : sea $m = 5$.
2. Determine el valor de verdad de:
 - (i) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(xy = 1) \quad F, x = 0$;
 - (ii) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(xy = 1) \quad V, x = y = 1$.
3. Determine el valor de verdad de: $(\forall x \in A, P(x)) \wedge (\forall x \in A, \overline{P(x)})$.
 F .
4. Reducir:

$$(\exists x \in A, \overline{q(x)}) \vee [(\forall x \in A, \overline{p(x)}) \wedge (\overline{(\exists x \in A, r(x)) \vee (\forall x \in A, q(x))})].$$

Solución.

$$(\exists x \in A, \overline{q(x)}) \vee [(\forall x \in A, \overline{p(x)}) \wedge (\forall x \in A, \overline{r(x)}) \wedge (\exists x \in A, \overline{q(x)})].$$

DEMOSTRACIÓN E INDUCCIÓN MATEMÁTICA

§2.1 Métodos de demostración

Los principales métodos de demostración son los siguientes.

1. Directa: $p \Rightarrow q$.
2. Contrarrecíproco: $[p \Rightarrow q] \Leftrightarrow [\bar{q} \Rightarrow \bar{p}]$.
3. Indirecta o Contradicción: $[p \Rightarrow q] \Leftrightarrow [(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow F \text{ (contradicción)}]$.

Esto último es cierto debido a que

$$[(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow F] \equiv \overline{p \wedge \bar{q}} \vee F \equiv (\bar{p} \vee q) \vee F \equiv [\bar{p} \vee q] \equiv [p \Rightarrow q].$$

EJEMPLO 2.1. Si m y n son pares en $\mathbb{Z}$, entonces $m + n$ es entero par.

(1) Directa. Hipótesis: $p = \{m \text{ y } n \text{ son pares enteros}\}$. Tesis: $q = \{m + n \in \mathbb{Z}, m + n \text{ es par}\}$. Supongamos que m y n son pares, entonces $m = 2k$ y $n = 2\hat{k}$, para algunos $k, \hat{k} \in \mathbb{Z}$. Luego, $m + n = 2k + 2\hat{k} = 2(k + \hat{k})$, y así $m + n$ es par.

(2) Contrarrecíproco: $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$. Hipótesis: $\bar{q} = m + n \in \mathbb{Z}$ es impar. Tesis: $\bar{p} = m$ es impar o n es impar. Supongamos que $m + n$ es impar, entonces $m + n = 2\hat{l} + 1$, $\hat{l} \in \mathbb{Z}$. Si m es impar, terminamos. Si m es par, $m = 2j$, $j \in \mathbb{Z}$. Luego $n = (m + n) - m = 2\hat{l} + 1 - 2j = 2(\hat{l} - j) + 1$, por tanto n es impar.

(3) Contradicción o Indirecta: $(p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \bar{q} \Rightarrow F)$. Hipótesis: $p = m \wedge n$ pares. Tesis: $\bar{q} = m + n$ impar. Luego $p \wedge \bar{q}$ supone m, n pares y $m + n$ impar. Así, $m + n = 2k + 1$, $n = 2\hat{k}$, y por tanto $m = (m + n) - n = 2k + 1 - 2\hat{k} = 2(k - \hat{k}) + 1$, que es impar. De esta forma m es par e impar a la vez. Contradicción.

Observación. Ya hemos visto varios ejemplos de estos métodos en el Capítulo 1: la demostración por contrarrecíproco de “si a^2 es impar, entonces a es impar” (ejemplo (2) de la sección 1.4), la discusión sobre la

paridad del cuadrado de un número, y las dos demostraciones por contradicción de que $\sqrt{2}$ no es racional (ejercicios (3)–(7) de la sección 1.5).

§2.2 Inducción matemática

Esta técnica de demostración es exclusiva para los números naturales $\mathbb{N}$.

Veamos primero la idea de Gauss para sumar los primeros 100 números naturales, agrupando en parejas que suman 101:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100 = \underbrace{(100 + 1)}_{101} \cdot \underbrace{\frac{100}{2}}_{50} = (101)(50).$$

En general,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Observación. El número $\frac{n(n+1)}{2}$ es siempre natural, no es fracción. En efecto:

- Si $n = 2k$ entonces $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2k+1)2k}{2} = (2k+1)k \in \mathbb{N}$.
- Si $n = 2k + 1$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} &= \frac{(2k+2)(2k+1)}{2} \\ &= \frac{2(k+1)(2k+1)}{2} = (k+1)(2k+1) \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $P(n)$ un enunciado que depende de n . Suponga que se satisfacen:

- (1) $P(1)$ es verdadera;
- (2) $\forall k \in \mathbb{N}$, si $P(k)$ es verdadero entonces $P(k+1)$ es verdadero.

Entonces $P(n)$ es verdadero $\forall n \in \mathbb{N}$.

EJEMPLO 2.2. Primero experimentemos. La suma del primer número impar es ese impar al cuadrado; la de los primeros dos impares es dos al

cuadrado; la de los primeros tres es tres al cuadrado, y así sucesivamente: la suma de los primeros n números impares es n^2 :

$$\begin{aligned}
 1 &= 1^2 \\
 1 + 3 &= 4 = 2^2 \\
 1 + 3 + 5 &= 9 = 3^2 \\
 1 + 3 + 5 + 7 &= 16 = 4^2 \\
 1 + 3 + 5 + 7 + 9 &= 25 = 5^2 \\
 &\vdots \\
 1 + 3 + \cdots + (2n - 1) &= n^2.
 \end{aligned}$$

Lo anterior se expresa como $\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$.

Paso 1. Para $n = 1$: $\sum_{i=1}^1 (2i - 1) = 2(1) - 1 = 1 = 1^2$ es verdadera.

Paso 2. Suponemos cierto para $n = k$: $1 + 3 + \cdots + (2k - 1) = k^2$ (hipótesis de inducción). Debemos probar para $k + 1$:

$$\begin{aligned}
 &1 + 3 + \cdots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] \\
 &= [1 + 3 + \cdots + (2k - 1)] + [2(k + 1) - 1] \\
 &= k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2. \quad \square
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.3. Demostrar por inducción $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Paso 1. Para $n = 1$: $\sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ es verdadera.

Paso 2. Suponemos $1 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ (hipótesis).

Paso 3. Para $k + 1$:

$$\begin{aligned}
 1 + \cdots + k + (k + 1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) \\
 &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Recordar que: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$ y $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; en particular, $\frac{a}{b} + c = \frac{a + bc}{b}$.

TAREA. Demostrar las siguientes *sumas importantes*.

Sumas importantes	
$(1) \sum_{k=1}^n 1 = n$	$(3) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$(2) \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$	$(4) \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

TAREA. Demuestre las siguientes fórmulas por inducción:

$$1. \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

$$2. 4n < 2^n, \forall n \geq 5.$$

Solución (2).

Paso 1. Para $n = 5$: $4 \cdot 5 = 20 < 32 = 2^5$. ✓

Paso 2. Suponemos $4k < 2^k$ (hipótesis).

Paso 3. Para $k + 1$:

$$\begin{aligned} 4(k+1) &= 4k + 4 < 2^k + 4 \quad (\text{hipótesis}) \\ &< 2^k + 4k \quad (\text{truco; para usar la hipótesis: } 4 < 4k) \\ &< 2^k + 2^k = 2(2^k) = 2^{k+1}. \quad \square \end{aligned}$$

Idea del truco. Nos gustaría:

$$\text{p.d. } 2^k + 4 < 2^{k+1}; \quad \text{p.d. } 2^k + 4 < 2 \cdot 2^k; \quad \text{p.d. } 2^k + 4 < 2^k + 2^k,$$

¿cómo seguir? Basta ver que $4 < 2^k$, y como $k \geq 5$, por hipótesis $4 < 4k < 2^k$.

Algunas propiedades de la suma $\sum$ (aplicada solo a números naturales):

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1+l}^{n+l} (k-l), \quad \forall l \in \mathbb{Z}, \quad (2.1)$$

$$\sum_{k=1}^n a \cdot k = a \cdot \sum_{k=1}^n k, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (ak + b) &= a \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n b = a \frac{n(n+1)}{2} + bn \\ &= n \left(\frac{a(n+1) + 2b}{2} \right), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\sum_{k=1}^n (4k - 1) = 2n^2 + n. \quad (2.4)$$

En el caso $a = 2$, $b = -1$, la igualdad (2.3) se reduce a $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$. Para ver la última igualdad:

$$\sum_{k=1}^n (4k - 1) = 4 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 = 4 \frac{n(n+1)}{2} - n = 2(n^2 + n) - n = 2n^2 + n.$$

EJERCICIOS.

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = ? \quad \sum_{k=1}^n (k+1)^2 = ? \quad \sum_{k=1}^n (k+1)^3 = ? \quad (2.5)$$

Para la primera:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(k+1) &= \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+4)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.4. Demuestre por inducción que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

Paso 1. $n = 1$: $1 \cdot 1! = 1 = 2! - 1 = (1+1)! - 1$. ✓

Paso 2. Hipótesis: $1 \cdot 1! + \cdots + k \cdot k! = (k+1)! - 1$.

Paso 3. Para $k + 1$:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 1! + \cdots + k \cdot k! + (k + 1) \cdot (k + 1)! \\ &= (k + 1)! - 1 + (k + 1) \cdot (k + 1)! \\ &= (k + 1)! [1 + (k + 1)] - 1 = (k + 2)! - 1. \quad \square \end{aligned}$$

Observación. En el Paso 3 podemos partir de $(*) = 1 \cdot 1! + \cdots + k \cdot k! + (k + 1) \cdot (k + 1)!$ o de $(**) = (k + 2)! - 1$. Lo más conveniente es partir de $(*)$ y llegar limpiamente a $(**)$.

EJEMPLO 2.5. Considere las n potencias de un número real r : $S_n = r^0 + r^1 + \cdots + r^{n-1}$. Encuentre una fórmula y muestre por inducción.

Definimos $S_n = 1 + r + \cdots + r^{n-1}$. Como $rS_n = r + r^2 + \cdots + r^n$, tenemos $S_n - rS_n = 1 - r^n$, de donde $S_n = \frac{1 - r^n}{1 - r} = 1 + r + \cdots + r^{n-1}$, $\forall n \geq 1$.

$$\text{Paso 1. } n = 1: \frac{1 - r^1}{1 - r} = 1 = r^0. \checkmark$$

$$\text{Paso 2. Hipótesis: } 1 + r + \cdots + r^{k-1} = \frac{1 - r^k}{1 - r}.$$

Tesis. Para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} 1 + r + \cdots + r^{k-1} + r^k &= \frac{1 - r^k}{1 - r} + r^k = \frac{1 - r^k + r^k(1 - r)}{1 - r} \\ &= \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r}. \quad \square \end{aligned}$$

EJERCICIOS RESUELTOS.

1. Demuestre que $n^3 + 2n$ es divisible por 3, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Demuestre que $4^n - 1$ es divisible por 3, $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. Demuestre que $n^2 - n$ es divisible por 2, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
4. Demuestre que $n^2 < 2^n$, $\forall n > 4$.

SOLUCIONES. Todas las demostraciones son por inducción, ya que estamos en $\mathbb{N}$.

1. *Paso 1.* $1^3 + 2 \cdot 1 = 3 = 3 \cdot 1$. ✓ *Paso 2.* $k^3 + 2k = 3l$, $l \in \mathbb{N}$.
Paso 3.

$$\begin{aligned}(k+1)^3 + 2(k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 \\ &= (k^3 + 2k) + 3k^2 + 3k + 3 \\ &= 3l + 3(k^2 + k + 1) = 3 \underbrace{(l + k^2 + k + 1)}_{l'}. \quad \square\end{aligned}$$

2. *Paso 1.* $4^1 - 1 = 3 = 3 \cdot 1$. ✓ *Paso 2.* $4^k - 1 = 3j$, $j \in \mathbb{N}$. *Paso 3.*

$$4^{k+1} - 1 = 4 \cdot 4^k - 1 = 4(4^k - 1) + 3 = 4 \cdot 3j + 3 = 3 \underbrace{(4j + 1)}_{\hat{j}}. \quad \square$$

3. *Paso 1.* $2^2 - 2 = 2 = 2 \cdot 1$. ✓ *Paso 2.* $k^2 - k = 2l$, $l \in \mathbb{N}$. *Paso 3.*

$$(k+1)^2 - (k+1) = k^2 - k + 2k = 2l + 2k = 2(l+k). \quad \square$$

4. *Paso 1.* $5^2 = 25 < 32 = 2^5$. ✓ *Paso 2.* $k^2 < 2^k$. *Paso 3.* Para $k \geq 5$: $2 < (k-1)^2 \Rightarrow 2k+1 < k^2$. Entonces

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 < k^2 + k^2 = 2k^2 \leq 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}. \quad \square$$

TEORÍA DE CONJUNTOS

§3.1 Conjuntos

DEFINICIÓN 3.1. Un **conjunto** es una colección o agrupación de objetos diferentes.

EJEMPLOS.

1. $A =$ Conjunto cuyos miembros son los primeros cuatro números naturales (*escritura por comprensión*). $A = \{1, 2, 3, 4\} \leftarrow$ *escritura por extensión*.
2. $B =$ Los colores de la bandera Chilena $= \{\text{Blanco, azul, rojo}\}$.
3. $C = \{a, b, c, \dots, x, y, z\} =$ Letras del alfabeto latino moderno.

NOTACIÓN. $\in :=$ Indica pertenencia. $\notin :=$ Indica no pertenencia.

EJEMPLO. Sea $M = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Entonces $2 \in M$ y $5 \notin M$.

NOTACIÓN. $\emptyset :=$ Conjunto vacío $:=$ el conjunto sin elementos. $U :=$ universo.

EJEMPLO.

1. $M = \{\text{números mayores que 9 y menores que 5}\} = \emptyset$.
2. $P = \{x \mid \frac{1}{x} = 0\} = \emptyset$.

NOTACIÓN. $\{a\} =$ Conjunto de 1 sólo elemento = “singletón”.

AXIOMA DE EXTENSIÓN. Dos conjuntos son iguales si y solamente si tienen los mismos elementos: $[A = B \text{ si } \forall x \in A \Leftrightarrow x \in B]$.

DEFINICIÓN 3.2. Sea $X \neq \emptyset$. $\sim$ es una **relación de equivalencia** si es reflexiva, simétrica y transitiva:

- (i) Reflexiva: $A \sim A$, para todo conjunto A .

(ii) Simétrica: $A \sim B \Rightarrow B \sim A$.

(iii) Transitiva: $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

EJEMPLO. La igualdad; el paralelismo.

DEFINICIÓN 3.3. *Subconjunto*.

$$B \subset A : \quad \forall x \in B \Rightarrow x \in A.$$

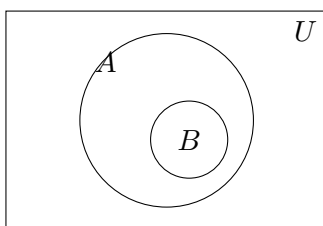


Figura 3.1: B es subconjunto de A .

EJERCICIO. Los múltiplos de 4 están contenidos en los múltiplos de 2.

$$A = \text{múltiplos de 4} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\},$$

$$B = \text{múltiplos de 2} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2\bar{k}, \bar{k} \in \mathbb{Z}\}.$$

P.D. $A \subset B$. Si $x \in A$, entonces $x = 4k = (2 \cdot 2)k = 2 \cdot (2k) = 2k'$, luego $x \in B$. ■

§3.2 Operaciones con conjuntos

Sean A, B conjuntos, U universo.

1. $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

Si $A \cap B = \emptyset$, la unión se llama *unión disjunta*.

2. $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

3. $A - B = A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

4. $A^C = \{x \mid x \notin A\}$.

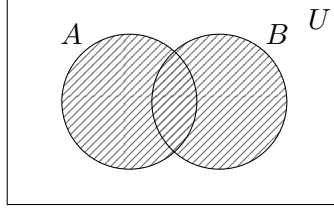


Figura 3.2: La parte sombreada representa la unión de A y B .

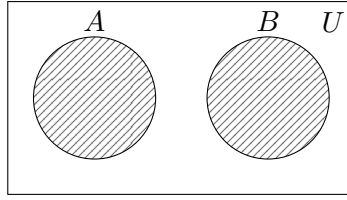


Figura 3.3: Unión disjunta: $A \cap B = \emptyset$.

5. Diferencia simétrica:

$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$. (TAREA. Probar la igualdad de la definición.)

§3.2.1 Relaciones entre vacío y universo

PROPOSICIÓN 3.4. (1) $A \cap A^C = \emptyset$. (2) $\emptyset^C = U$. (3) $U^C = \emptyset$.

Demostración. (1) Supongamos que $\exists x \in A \cap A^C$. Luego $x \in A \wedge x \notin A$, contradicción. Por lo tanto, no existe $x \in A \cap A^C$, es decir, $A \cap A^C = \emptyset$.

(2) Por (3), $U^C = \emptyset$; tomando complemento tenemos $U = \emptyset^C$.

(3) Dado que $A \cup A^C = U$, entonces $U^C = (A \cup A^C)^C$. Supongamos que existe $x \in U^C$, luego $\exists x \in (A \cup A^C)^C$, entonces $\exists x \in A \cap A^C$, contradicción. Por lo tanto, no existe $x \in U^C$, lo que implica que $U^C = \emptyset$. ■

EJERCICIO. Probar que $A \setminus A = \emptyset$.

Demostración. Supongamos que existe $x \in A$ y $x \notin A$, esto es $\underbrace{p \wedge \bar{p}}_F$.

Por lo tanto, $A \setminus A = \emptyset$. ■

PROPIEDADES. (Tareas)

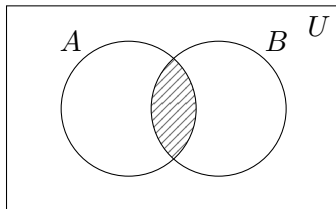


Figura 3.4: La parte sombreada representa la intersección de A y B .

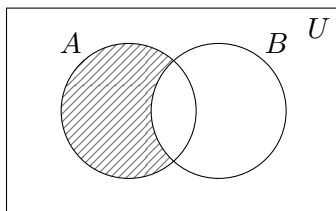


Figura 3.5: La parte sombreada representa la diferencia entre A y B .

Unión ($\cup$):

- (1) $A \cup \emptyset = A$.
- (2) $A \cup B = B \cup A$. *Conmutatividad.*
- (3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. *Asociatividad.*
- (4) $A \cup A = A$. *Idempotencia.*
- (5) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

Intersección ($\cap$):

- (1') $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- (2') $A \cap B = B \cap A$. *Conmutatividad.*
- (3') $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. *Asociatividad.*
- (4') $A \cap A = A$. *Idempotencia.*
- (5') $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

Distributividad:

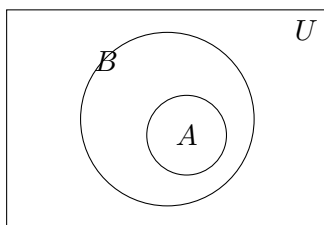


Figura 3.6: Si $A \subset B$, la diferencia es vacía.

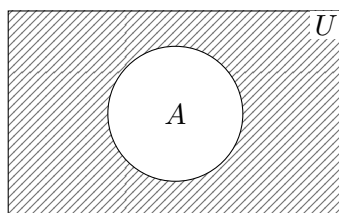


Figura 3.7: La parte sombreada representa el complemento de A en el Universo U .

$$(1) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

$$(2) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

OBSERVACIÓN. (Tareas.)

$$(1) \quad A \subseteq A \cup B.$$

$$(2) \quad B \subseteq A \cup B.$$

$$(3) \quad (A \cap B) \subseteq A.$$

$$(4) \quad (A \cap B) \subseteq B.$$

LEYES DE DE MORGAN.

$$(1) \quad (A \cup B)^C = A^C \cap B^C.$$

$$(2) \quad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C.$$

EJERCICIO. Pruebe que $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$.

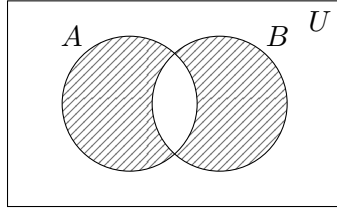


Figura 3.8: La parte sombreada representa la diferencia simétrica de A y B .

Demostración. (Llegaremos a una contradicción, o sea, a algo falso.) Supongamos que $\exists x \in [(A \setminus B) \cap (A \cap B)]$. Entonces $(x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \in A \wedge x \in B, \Rightarrow (x \in A) \wedge \underbrace{(x \in B \wedge x \notin B)}_F \Rightarrow F$. ■

Observación. La identidad $A \cap B^C = A \setminus B$ es muy útil; su demostración, junto con otras, se propone en la sección de Ejercicios al final del capítulo.

EJERCICIO.

- (1) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.
- (2) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.
- (3) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

Demostración. (1) Sea $x \in A$. Sabemos que $x \in B$, y como $B \subseteq C$, entonces $x \in C$.

(2)

$$\begin{aligned} A \setminus (A \setminus B) &= (A \setminus B)^C \cap A = (B^C \cap A)^C \cap A = (B \cup A^C) \cap A \\ &= (B \cap A) \cup (A^C \cap A) = (B \cap A) \cup \emptyset = A \cap B. \end{aligned}$$

(3) Por un lado $A \cap (B - C) = A \cap C^C \cap B$. Por otro,

$$\begin{aligned} (A \cap B) - (A \cap C) &= (A \cap C)^C \cap (A \cap B) = (A^C \cup C^C) \cap (A \cap B) \\ &= \underbrace{(A^C \cap A \cap B)}_{\emptyset} \cup (C^C \cap A \cap B) = C^C \cap A \cap B. \end{aligned}$$

Así $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$. ■

§3.3 Producto cartesiano y conjunto potencia

PRODUCTO CARTESIANO. $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$.

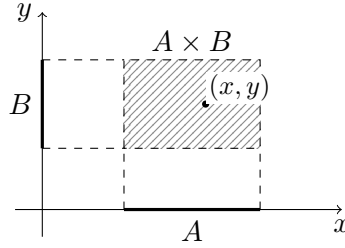


Figura 3.9: Elementos del producto $A \times B$.

PROPIEDAD. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

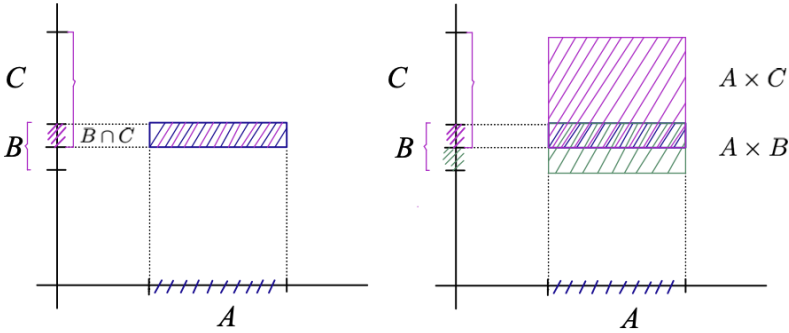


Figura 3.10: Visualización geométrica de la propiedad: a la izquierda $A \times (B \cap C)$; a la derecha, $A \times B$ y $A \times C$ superpuestos.

Demostración.

$$\begin{aligned}
 (x, y) \in A \times (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C) \\
 &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C) \\
 &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \wedge (x, y) \in (A \times C) \\
 &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C).
 \end{aligned}$$

■

CONJUNTO POTENCIA. Se llama *conjunto potencia* o partes de A al conjunto $\mathcal{P}(A)$.

EJEMPLO. Si $A = \{a, b\}$, entonces $\mathcal{P}(A) = \{\{a, b\}, \{a\}, \{b\}, \emptyset\}$. Si $T = \{4, 7, 8\}$, entonces $\mathcal{P}(T) = \{T, \{4, 7\}, \{4, 8\}, \{7, 8\}, \{4\}, \{7\}, \{8\}, \emptyset\}$.

CARDINALIDAD. Número de elementos del conjunto. Notación: $n(A)$, $\text{card}(A)$, $\#A$.

EJEMPLO. $A = \{2, 4, 6\}$, entonces $\#A = 3$ y $\#\mathcal{P}(A) = 8$. En general, si $\#A = n$ entonces $\#\mathcal{P}(A) = 2^n$.

EJEMPLO 3.5. Critique: Si $X \subset Y$, entonces $\mathcal{P}(Y \setminus X) \subset \mathcal{P}(Y) \setminus \mathcal{P}(X)$.

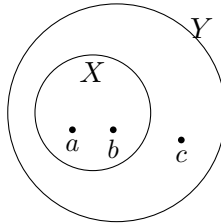


Figura 3.11: Elementos de X y Y .

Solución. Es falso. Sea $Y = \{a, b, c\}$ y $X = \{a, b\}$. Tenemos $Y \setminus X = \{c\}$, $\mathcal{P}(Y \setminus X) = \{\{c\}, \emptyset\}$, $\mathcal{P}(Y) = \{\{a, b, c\}, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ y $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}\}$. Notemos que $\emptyset \in \mathcal{P}(Y \setminus X)$ pero $\emptyset \notin \mathcal{P}(Y) \setminus \mathcal{P}(X)$. ■

La siguiente demostración funciona siempre que $A \neq \emptyset$. Sea $A \in \mathcal{P}(Y \setminus X)$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow A \subset (Y \setminus X) &\Rightarrow A \subset Y \wedge A \not\subset X \\ \Rightarrow A \in \mathcal{P}(Y) \wedge A \notin \mathcal{P}(X) &\Rightarrow A \in [\mathcal{P}(Y) - \mathcal{P}(X)]. \end{aligned}$$

§3.4 Ejercicios

Para los métodos de demostración y la inducción matemática, véase el Capítulo 2.

1. Pruebe que $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$.
2. Pruebe que $(A \cap B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$.

3. Pruebe que $A \cap B^C = A \setminus B$. (*Importante.*)
4. Pruebe que $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
5. Pruebe que $A \subseteq B \Rightarrow (A \times C) \subset (B \times C)$.
6. Pruebe que $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.

GEOMETRÍA ANALÍTICA

§4.1 Línea recta

§4.1.1 Distancia definida por el valor absoluto

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad \text{Sean } a, b \in \mathbb{R}: d(a, b) = |a - b|.$$

EJEMPLOS. $d(3, 4) = |3 - 4| = 1$; $d(-2, -1) = 1$; $d(0, -3) = 3$.

DISTANCIA ENTRE PUNTOS EN $\mathbb{R}^2$.

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

EJEMPLO. $d((0, 0), (1, 1)) = \sqrt{(1 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{2}$.

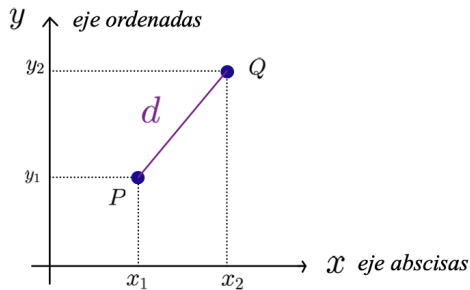


Figura 4.1: Distancia entre P y Q en $\mathbb{R}^2$.

§4.1.2 Punto Medio

En $\mathbb{R}$, el punto medio entre x_1 y x_2 está dado por

$$m = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Ahora, en $\mathbb{R}^2$ centrado en $(0, 0)$. Sean $P = (a, b)$ y $M = (x, y)$ el punto medio entre P y el origen.

$$\textcircled{1} \quad y = \frac{xb}{a} \text{ (si } x = a \Rightarrow y = b\text{), de donde } x = \frac{ay}{b}, x^2 = \frac{a^2y^2}{b^2}.$$

$$\textcircled{2} \quad a^2 + b^2 = (d((a, b), (0, 0)))^2.$$

Por Pitágoras, como (x, y) es el punto medio:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{d((a, b), (0, 0))}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Luego, en $\textcircled{1}$:

$$\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} \Rightarrow y^2 \cdot \frac{a^2 + b^2}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{4} \Rightarrow y^2 = \frac{b^2}{4} \Rightarrow \boxed{y = \frac{b}{2}},$$

luego $x = \frac{a}{2}$.

¿Cuál es el punto medio entre $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$?

$$PM(P, Q) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right). \quad (4.1)$$

EJERCICIO. Encuentre el punto medio entre $P = (0, 1)$ y $Q = (1, 0)$.

DEFINICIÓN 4.1. *Línea Recta vía lugar geométrico.* La línea recta es el lugar geométrico L de los puntos tales que dados dos puntos en L , el valor de la pendiente es constante.

Pendiente de la recta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{cat. op.}}{\text{cat. ad.}} = \text{tangente}. \quad (4.2)$$

§4.1.3 Forma Punto-Pendiente de la ecuación de la recta

Dado un punto $P = (x_1, y_1)$ y la pendiente m , la ecuación de la recta es:

$$y = \underbrace{m}_{\text{pendiente}} \cdot (x - x_1) + y_1 = mx + \underbrace{(-mx_1 + y_1)}_{\text{coef. de posición}} = mx + \underbrace{b}_{\text{corta al eje } Y}.$$

EJERCICIO. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $P = (3, 5)$ y tiene pendiente $m = -7$.

Solución. $y = (-7)(x - 3) + 5 = 21 - 7x + 5 = -7x + 26$.

Observación. Una recta que pasa por $(0, 0)$, el origen, tiene la forma $y = \underbrace{m}_{\text{pendiente}} \cdot x$. Coeficiente de posición $= 0$.

EJERCICIO. Dados los puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$. Encuentre la recta que pasa por A y B .

Solución. La pendiente es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, luego $y = m(x - x_1) + y_1$.

SUB-EJERCICIO. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $A = \begin{pmatrix} -1 \\ x_1 \end{pmatrix}, y_1$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ x_2 \end{pmatrix}, y_2$. (Dibujar.)

$$y = \frac{-6}{4}(x + 1) + 2 = -\frac{3}{2}(x + 1) + 2.$$

EJERCICIO. Encuentre la ecuación de la recta con $m = 3$ e intersección con el eje $y = -2$.

Solución. $y = 3(x - x_0) - 2 = 3x - 2$. (Nótese que $x = 0 \Rightarrow y = -2$.)

Rectas verticales: $x = a$. Rectas horizontales: $y = b$.

§4.1.4 Ecuación general de la recta

$$\boxed{Ax + By + C = 0}, \quad A, B \neq 0. \quad (4.3)$$

Observación.

- Si $B = 0$: $Ax + C = 0 \Rightarrow x = -C/A$ (recta vertical).
- Si $A = 0$: $By + C = 0 \Rightarrow y = -C/B$ (recta horizontal).
- Si $A, B \neq 0$: $y = \underbrace{(-A/B)}_{\text{Pendiente}} x + \underbrace{(-C/B)}_{\text{coef. posición}}.$

EJERCICIO. Hallar los coeficientes de la ecuación general de la recta que pase por $P = (-1, 4)$ y $Q = (3, -2)$, con $A, B, C \neq 0$.

Solución. Reemplazando en (4.3):

$$(1) \quad -A + 4B + C = 0$$

$$(2) \quad 3A - 2B + C = 0$$

Multiplicamos (1) por 3 y sumamos con (2): $10B + 4C = 0$, $\Rightarrow$

$B = -\frac{2}{5}C$. Luego $A = -\frac{3}{5}C$. Así $C(-\frac{3}{5}x - \frac{2}{5}y + 1) = 0$ y, como $C \neq 0$, la ecuación queda

$$-3x - 2y + 5 = 0.$$

PROPOSICIÓN 4.2. *Rectas paralelas. Dos rectas no verticales son paralelas si y solamente si tienen la misma pendiente.*

Demostración. Recordemos que dos triángulos son semejantes si y solamente si sus lados correspondientes son proporcionales. Si las rectas son paralelas, los triángulos $\triangle DEF$ y $\triangle ABC$ de la figura tienen dos ángulos iguales (α y 90°), por lo tanto son semejantes, luego

$$\frac{d(E, F)}{d(C, B)} = \frac{d(D, E)}{d(A, B)} \Rightarrow \frac{d(E, F)}{d(D, E)} = \frac{d(C, B)}{d(A, B)} = \frac{\text{cat. op.}}{\text{cat. ad.}},$$

de donde $m_1 = m_2$. ■

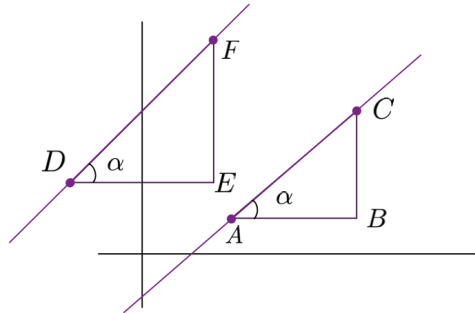


Figura 4.2: Rectas paralelas: los triángulos $\triangle DEF$ y $\triangle ABC$ son semejantes.

EJEMPLO. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $P = (5, 2)$ y es paralela a $4x + 6y + 5 = 0$.

Solución. $m = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}(x - 5) + 2$.

TEOREMA 4.3. *Rectas perpendiculares. Si dos rectas son perpendiculares ($\perp$) entonces $m_1 \cdot m_2 = -1$.*

Demostración. Considere dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 con pendientes m_1 y m_2 que se cortan en el origen. Tomando $A = (1, m_1)$ y $B = (1, m_2)$:

$$d(A, B)^2 = d(O, A)^2 + d(O, B)^2.$$

Luego $d((1, m_1), (1, m_2))^2 = (m_1 - m_2)^2 = m_1^2 - 2m_1m_2 + m_2^2$. Por otro lado $d(O, A)^2 + d(O, B)^2 = (1 + m_1^2) + (1 + m_2^2)$. Igualando:

$$m_1^2 - 2m_1m_2 + m_2^2 = 1 + m_1^2 + 1 + m_2^2 \Rightarrow -2m_1m_2 = 2 \Rightarrow \boxed{m_1 \cdot m_2 = -1}.$$

■

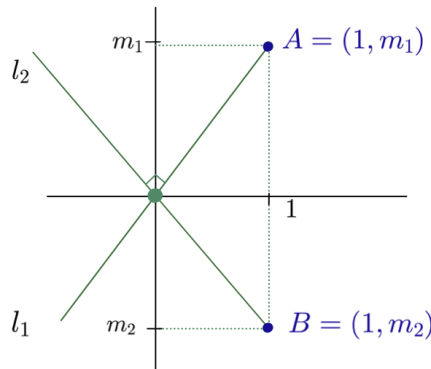


Figura 4.3: Rectas perpendiculares por el origen: $A = (1, m_1)$ y $B = (1, m_2)$.

EJERCICIO. Verifique que $P = (3, 3)$, $Q = (8, 17)$ y $R = (11, 5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

Solución. $m_{PR} = \frac{3-5}{3-11} = \frac{1}{4}$; $m_{RQ} = \frac{17-5}{8-11} = -4$.

Luego $\boxed{m_{PR} \cdot m_{RQ} = -1}$.

■

APLICACIÓN. Pendiente como rapidez de cambio.

“Cuando se usa una recta para modelar la relación entre dos cantidades, la pendiente de la recta se llama rapidez de cambio de una cantidad respecto de la otra.”

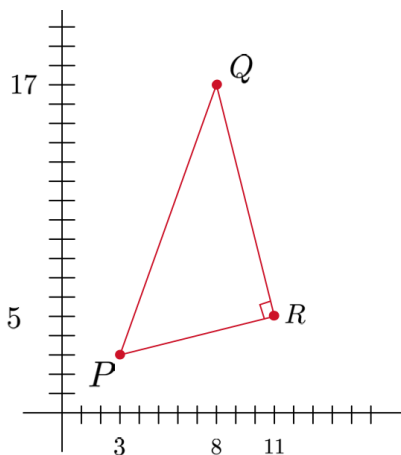


Figura 4.4: Triángulo rectángulo de vértices $P = (3, 3)$, $Q = (8, 17)$ y $R = (11, 5)$.

EJEMPLO. Tanque llenado a 2 gal/min. La pendiente está dada por:
 $\frac{6 \text{ gal}}{3 \text{ min}} = 2 \text{ gal/min}$.

EJEMPLO. Una presa se construye en un río para crear un estanque. El nivel de agua ω del estanque está dado por $\omega = 4,5t + 28$, donde t es el número de años desde que se construyó la presa y ω se mide en pies.

- Trace la gráfica de la ecuación. Si $t = 0$, $\omega = 28$. $t = 2 \Rightarrow \omega = 4,5(2) + 28 = 37$.
- ¿Qué representan la pendiente y la intersección con el eje ω de este gráfico? La pendiente es $m = 4,5$: rapidez de cambio del nivel del agua respecto al tiempo. $4,5 \text{ pies/año}$ (1 pie $\approx$ 30 cm).

EJERCICIO (rectas). Considere $L_1 : 5x + 3y - 7 = 0$; $L_2 : 2x + y - 3 = 0$; $L_3 : (2k + 1)x - (k - 1)y + 6 = 0$; y el punto $P(-4, 9)$. Determinar:

- Si P pertenece a L_1 . Sí: $5(-4) + 3(9) - 7 = 0$.
- Intersección de L_1 y L_2 . Resolvemos el sistema $5x + 3y - 7 = 0$ y $2x + y - 3 = 0$. De la segunda: $y = 3 - 2x$; sustituyendo en la primera: $5x + 3(3 - 2x) - 7 = 0 \Rightarrow -x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$, $\boxed{y = -1}$.

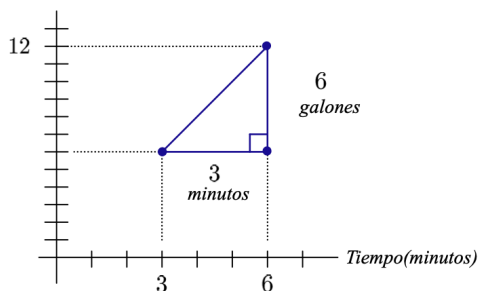
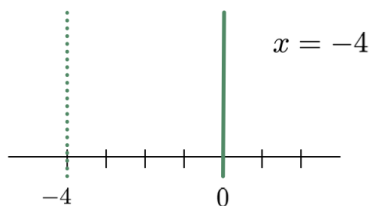


Figura 4.5: Tanque llenado a razón de 2 galones por minuto.

- (c) Recta por P paralela al eje Y . $x = -4$.



- (d) $k \in \mathbb{R}$ tal que $L_2 \perp L_3$. $m_2 = -2, m_3 = \frac{2k+1}{k-1}$; de $m_2 \cdot m_3 = -1$:
 $-2 \frac{2k+1}{k-1} = -1 \Rightarrow 4k+2 = k-1 \Rightarrow \boxed{k = -1}$.
- (e) (Tarea) $k \in \mathbb{R}$ tal que $L_1 \parallel L_3$. $m_1 = -\frac{5}{3} = m_3 = \frac{2k+1}{k-1} \Rightarrow$
 $3(2k+1) = -5(k-1) \Rightarrow \boxed{k = \frac{2}{11}}$.
- (f) $k \in \mathbb{R}$ tal que L_3 sea horizontal. La recta es horizontal si pendiente
 $= 0$: $m_3 = \frac{2k+1}{k-1} = 0 \Rightarrow 2k+1 = 0 \Rightarrow \boxed{k = -\frac{1}{2}}$.
- (g) $k \in \mathbb{R}$ tal que L_3 sea vertical. La recta es vertical si el coeficiente
de y es 0: $-(k-1) = 0 \Rightarrow \boxed{k = 1}$.

§4.2 La parábola

DEFINICIÓN 4.4. *Parábola.* Lugar geométrico de los puntos que se mue-

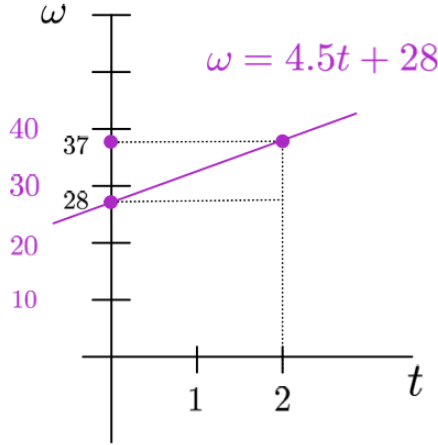


Figura 4.6: Nivel del agua $\omega = 4,5t + 28$.

ven de tal forma que su distancia a una recta fija (llamada *directriz*) es siempre igual a su distancia a un punto fijo (llamado *foco*) que no está en la recta.

§4.2.1 Parábola con vértice en $(0,0)$

TEOREMA 4.5. La ecuación de la parábola de vértice en el origen y eje coincidente con el eje X es $\boxed{y^2 = 4px}$, donde el foco está en $(p, 0)$ y la directriz es $\ell : \boxed{x = -p}$.

Si $p > 0$ la parábola se abre hacia la derecha; si $p < 0$, hacia la izquierda. De igual forma, si el vértice coincide con $(0,0)$ y el eje es el eje Y : $\boxed{x^2 = 4py}$, con foco en $(0, p)$ y directriz $\ell : \boxed{y = -p}$.

Sea $\widehat{P} = (x, y)$. La condición $|F\widehat{P}| = |\widehat{P}A|$ da:

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p| \Rightarrow (x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2,$$

de donde $\boxed{y^2 = 4px}$, es decir, $y = \pm 2\sqrt{px}$.

COROLARIO 4.6. Si $x = p$, entonces $y = \pm 2p$. Por lo tanto la longitud del lado recto es igual a $|4p|$.

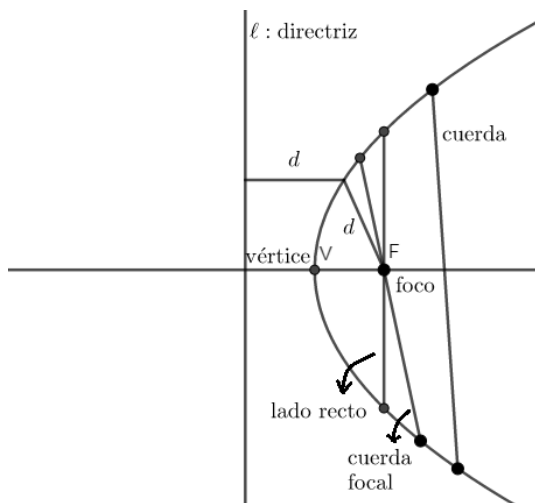


Figura 4.7: Parábola con vértice en el origen, eje sobre OX .

- Si $p > 0$, x no puede ser negativo, por lo tanto todo está a la derecha de Y .
- Si $p < 0$, x debe ser negativo, por lo tanto todo está a la izquierda de Y .

EJEMPLO 4.7. Una parábola con vértice en el origen y eje coincidente con el eje Y pasa por $(4, -2)$. Hallar la ecuación, foco, directriz y longitud del lado recto.

Solución. $x^2 = 4py$. Como pasa por $(4, -2)$: $16 = 4p(-2) \Rightarrow p = -2$. Luego $x^2 = -8y$, foco $(0, -2)$, directriz $y = 2$, longitud del lado recto $|4p| = 8$.

§4.2.2 Parábola de vértice (h, k) y eje paralelo a un eje coordenado

TEOREMA 4.8. La ecuación de la parábola de vértice (h, k) y eje paralelo al eje X tiene la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, siendo $|p|$ la longitud del segmento del eje entre el foco y el vértice. Si el eje es paralelo al eje Y : $(x - h)^2 = 4p(y - k)$.

Deducción (traslación de ejes). Pongamos $x = x' + h$, $y = y' + k$, es

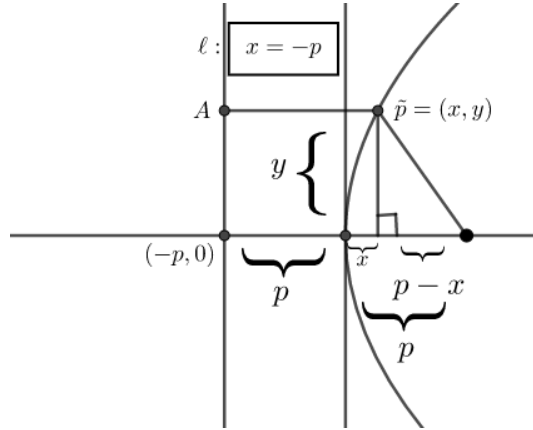


Figura 4.8: Deducción de $y^2 = 4px$: la condición $|F\hat{P}| = |\hat{P}A|$, con A sobre la directriz.

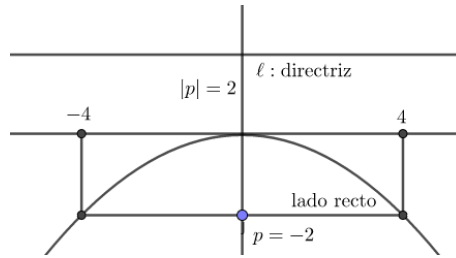


Figura 4.9: Parábola $x^2 = -8y$.

decir, $x' = x - h$, $y' = y - k$. En las coordenadas (x', y') el vértice queda en el origen, de modo que $(y')^2 = 4px'$, esto es, $(y - k)^2 = 4p(x - h)$.

Como antes, $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ se abre hacia la derecha si $p > 0$ y hacia la izquierda si $p < 0$; y $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ se abre hacia arriba si $p > 0$ y hacia abajo si $p < 0$.

Observación. $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ da $y^2 + \underbrace{a_1x}_{-4p} + \underbrace{a_2y}_{-2k} + \underbrace{a_3}_{k^2+4ph} = 0$. ¡No hay término xy !

EJEMPLO 4.9. Hallar la ecuación de la parábola con vértice $(3, 4)$ y foco $(3, 2)$.

Solución. $(x - h)^2 = 4p(y - k) \Rightarrow (x - 3)^2 = 4p(y - 4)$. Como $|p| =$

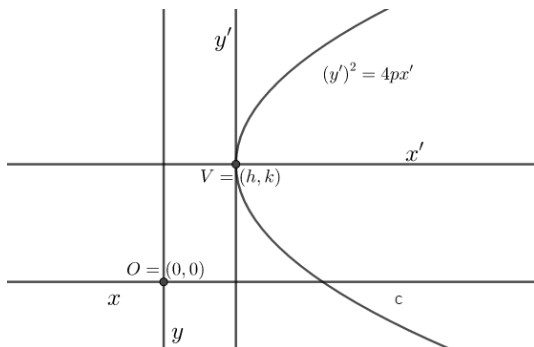


Figura 4.10: Traslación de ejes: $(y')^2 = 4px'$ con origen en $V = (h, k)$.

$|FV| = 2$ y F está abajo, $p = -2$, así $(x - 3)^2 = -8(y - 4)$. Longitud del lado recto $= |4p| = 8$. Directriz: $y = 6$. $\square$

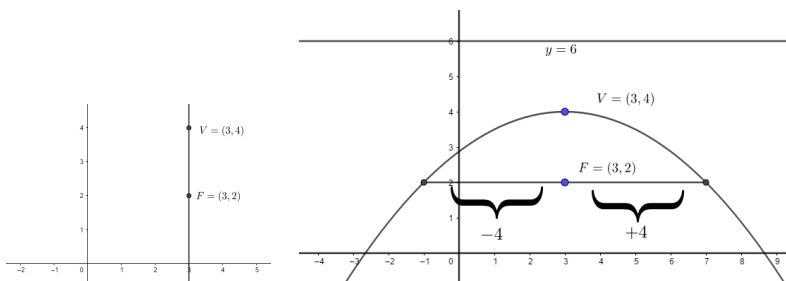


Figura 4.11: Bosquejo de $V = (3, 4)$ y $F = (3, 2)$, y la parábola $(x-3)^2 = -8(y-4)$ con directriz $y = 6$.

TEOREMA 4.10. *Clasificación de ecuación cuadrática. Una ecuación*

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

tiene las siguientes características:

- (1) Si $A = 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$: parábola con eje paralelo al eje X . Si, en cambio, $D = 0$: dos rectas paralelas al eje X . Sin lugar geométrico si raíces < 0 .
- (2) Si $A \neq 0$, $C = 0$, $E \neq 0$: parábola con eje paralelo al eje Y . Si, en cambio, $E = 0$: dos rectas paralelas al eje Y . Sin lugar geométrico.

EJEMPLO 4.11. Demostrar que $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$ es una parábola. Hallar V , F , ℓ y longitud del lado recto.

Solución. Dividiendo por 4: $x^2 - 5x - 6y + \frac{97}{4} = 0$. Completando el cuadrado: $(x - \frac{5}{2})^2 = 6(y - 3)$. Luego $V = (\frac{5}{2}, 3)$, $4p = 6 \Rightarrow \boxed{p = 3/2} > 0$, $F = (\frac{5}{2}, \frac{9}{2})$, $\ell : y = \frac{3}{2}$. Longitud del lado recto = 6. $\square$

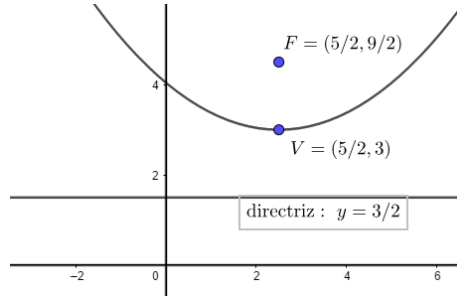


Figura 4.12: Parábola $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$.

§4.3 La circunferencia

DEFINICIÓN 4.12. *Circunferencia.* Una *circunferencia* es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante llamada *radio*, a un punto fijo llamado *centro*.

TEOREMA 4.13. *La circunferencia de centro (h, k) y radio r tiene ecuación*

$$\boxed{(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2} \quad (\text{forma ordinaria}).$$

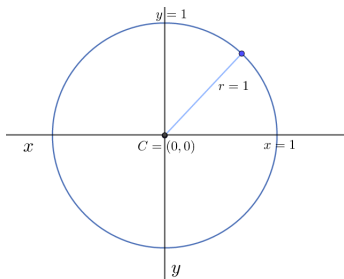
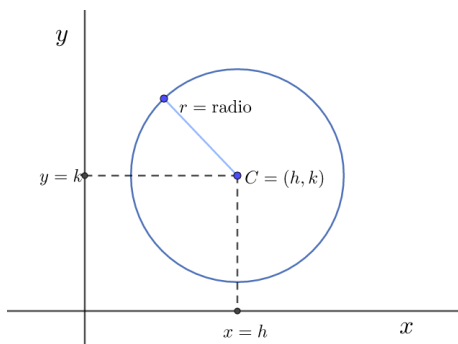
Demostración. Sea $P = (x, y)$:

$$d(P, (h, k)) = r \Rightarrow \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r \Rightarrow (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

■

COROLARIO 4.14. *La circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio r es*

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}.$$

Figura 4.13: El círculo unitario S^1 .Figura 4.14: Circunferencia de centro (h, k) y radio r .

Notación: $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

EJEMPLO 4.15. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices $P_1 = (-1, 1)$, $P_2 = (3, 5)$, $P_3 = (5, -3)$.

Método: (i) Escoger dos lados. (ii) Construir 2 mediatrices ℓ_1 y ℓ_2 (la *mediatriz* es la recta perpendicular a un segmento que se traza en su punto medio). (iii) La intersección C de ℓ_1 y ℓ_2 es el centro; el radio es la distancia a cualquier vértice. (El centro C no tiene por qué pertenecer al triángulo.)

$$A = \frac{P_1 + P_2}{2} = (1, 3); \quad B = \frac{P_2 + P_3}{2} = (4, 1).$$

$$m_{\overline{P_1 P_2}} = \frac{1-5}{-1-3} = 1 \Rightarrow \boxed{m_{\ell_1} = -1}; \quad m_{\overline{P_2 P_3}} = \frac{-3-5}{5-3} = -4 \Rightarrow$$

$$\boxed{m_{\ell_2} = \frac{1}{4}}.$$

$$\ell_2 : y - 1 = \frac{1}{4}(x - 4) \Rightarrow \boxed{4y - x = 0} \textcircled{1}; \quad \ell_1 : y - 3 = (-1)(x - 1) \Rightarrow$$

$$\boxed{y + x = 4} \quad (2).$$

$$\Rightarrow x = 4y \Rightarrow 5y = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{5}; \quad x = \frac{16}{5}.$$

$$\text{Luego } C = \left(\frac{16}{5}, \frac{4}{5}\right) \text{ y } r = d\left(\left(\frac{16}{5}, \frac{4}{5}\right), P_1\right) = \sqrt{\left(\frac{21}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{5}\sqrt{442}.$$

$$\text{Ecuación: } \boxed{\left(x - \frac{16}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{442}{25}}. \quad \square$$

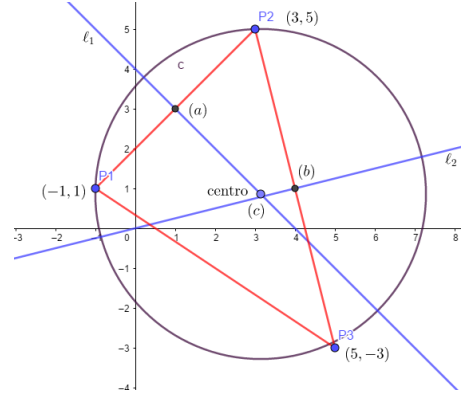


Figura 4.15: Circunferencia circunscrita al triángulo $P_1P_2P_3$.

§4.3.1 Forma general de la circunferencia

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde $D = -2h$, $E = -2k$, $F = h^2 + k^2 - r^2$.

TEOREMA 4.16. La ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una circunferencia de radio no nulo cuando $\boxed{D^2 + E^2 - 4F > 0}$. El centro

es $C = \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y el radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.

Demostración. Completando cuadrado perfecto: $\underbrace{x^2 + Dx}_{*1} + \underbrace{(y^2 + Ey)}_{*2} = -F$, con $*1 = \left(x + \frac{D}{2}\right)^2 - \frac{D^2}{4}$ y $*2 = \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 - \frac{E^2}{4}$:

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4} = r^2. \quad \square$$

DETERMINACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA SUJETA A 3 CONDICIONES.

EJEMPLO 4.17. Determinar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por $A = (-1, 1)$, $B = (3, 5)$ y $C = (5, -3)$.

Solución. Sustituimos en $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$: $A : -D + E + F = -2$; $B : 3D + 5E + F = -34$; $C : 5D - 3E + F = -34$.

$$\Rightarrow D + E = -8; \quad D = 4E; \quad \Rightarrow E = -8/5, \quad D = -32/5, \quad F = -34/5.$$

$5x^2 + 5y^2 - 32x - 8y - 34 = 0$; $C = (-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}) = (\frac{16}{5}, \frac{4}{5})$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \frac{1}{5}\sqrt{442}$; en forma ordinaria, $(x - \frac{16}{5})^2 + (y - \frac{4}{5})^2 = \frac{442}{25}$. $\square$

EJEMPLO 4.18. Hallar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por $(6, 2)$ y $(8, 0)$, con centro sobre la recta $3x + 7y + 2 = 0$.

Solución. El centro (h, k) satisface $3h + 7k + 2 = 0$. De las condiciones $(6 - h)^2 + (2 - k)^2 = r^2$ (1), $(8 - h)^2 + k^2 = r^2$ (2) y $3h + 7k + 2 = 0$ (3): Restando (1) - (2): $-24 - 4k + 4h = 0 \Rightarrow h = k + 6$ (4). Combinando (3) y (4): $3(6 + k) + 7k + 2 = 0 \Rightarrow k = -2$, $h = 4$. Luego $r^2 = (6 - 4)^2 + (2 + 2)^2 = 20 \Rightarrow r = 2\sqrt{5}$ (la solución negativa no sirve, ya que r es un radio).

Ecuación: $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 20$, centro $(4, -2)$, radio $2\sqrt{5}$. $\square$

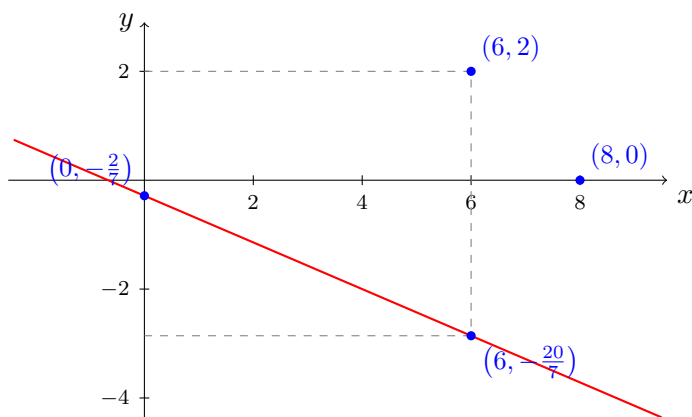


Figura 4.16: Bosquejo: los puntos $(6, 2)$ y $(8, 0)$, y la recta $3x + 7y + 2 = 0$ que contiene al centro.

EJEMPLO 4.19. *Recta tangente a una circunferencia.* Hallar la ecuación de la recta tangente a $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$ en el punto $(3, 5)$.

Solución. La familia de rectas por $(3, 5)$ es

$$\boxed{y = mx - 3m + 5}.$$

Sustituyendo en la circunferencia:

$$x^2(m^2 + 1) - (6m^2 - 4m + 8)x + (9m^2 - 12m + 15) = 0.$$

Para tangencia, $\Delta = 0$: $(6m^2 - 4m + 8)^2 - 4(m^2 + 1)(9m^2 - 12m + 15) = 0 \Rightarrow 16m^2 - 16m + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{m = \frac{1}{2}}$. Recta: $x - 2y + 7 = 0$.

EJEMPLO 4.20. Hallar la tangente a $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 18 = 0$ con pendiente 1.

Solución. $y = x + k$. De $\Delta = 0$: $k^2 + 12k + 20 = 0 \Rightarrow \boxed{k_1 = -2}$ y $\boxed{k_2 = -10}$. □

§4.4 La elipse

DEFINICIÓN 4.21. *Elipse.* Una *elipse* es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados *focos*, es siempre igual a una constante mayor que la distancia entre los dos puntos.

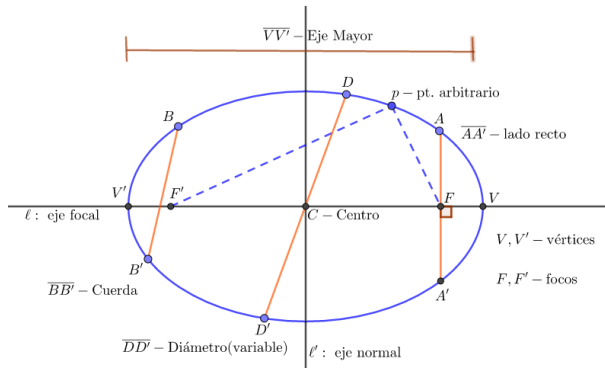


Figura 4.17: Partes de una elipse.

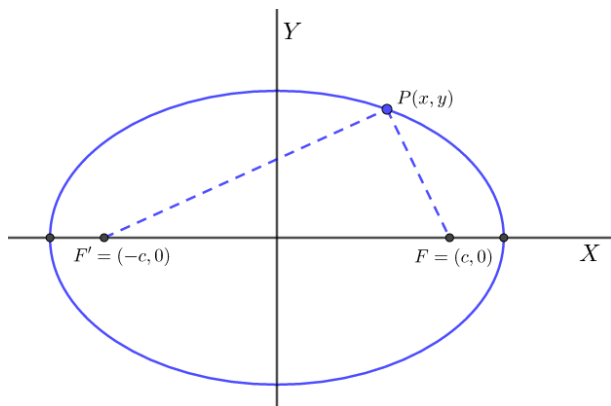


Figura 4.18: Deducción de la ecuación de la elipse: $|\overline{FP}| + |\overline{F'P}| = 2a$.

§4.4.1 Ecuación de la elipse con centro en el origen

Mostraremos que la ecuación es $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$.

$|\overline{FP}| + |\overline{F'P}| = 2a$ (donde $2a > 2c = d(F, F')$):

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \\
 & \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad / ()^2 \\
 & \Rightarrow (x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \quad / \frac{1}{4} \\
 & \Rightarrow a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + xc \quad / ()^2 \\
 & \Rightarrow a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2xc + x^2c^2 \\
 & \Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).
 \end{aligned}$$

Como $2a > 2c \Rightarrow a^2 > c^2 \Rightarrow \underbrace{(a^2 - c^2)}_{\text{def:}=b^2} > 0$. Así $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}.$$

□

TEOREMA 4.22. La ecuación de la elipse de centro en el origen, eje focal X , distancia focal $2c$ y constante $2a$ es $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$.

1. a : longitud del semieje mayor.

2. b : longitud del semieje menor.
3. c : longitud del centro al foco.
4. e : excentricidad $= \frac{c}{a}$ ($c < a \Rightarrow \frac{c}{a} < 1$), [$e = 0$ es círculo].
5. $F = (-c, 0), (c, 0)$.
6. Longitud del lado recto: evaluamos en $x = c$: $\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)$.

Las condiciones (1)–(3) satisfacen $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$.

Además $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2}$, pero $\boxed{b^2 = a^2 - c^2}$, luego

$$\boxed{y = \pm \frac{b^2}{a}}, \quad \text{longitud del lado recto} = \frac{2b^2}{a}.$$

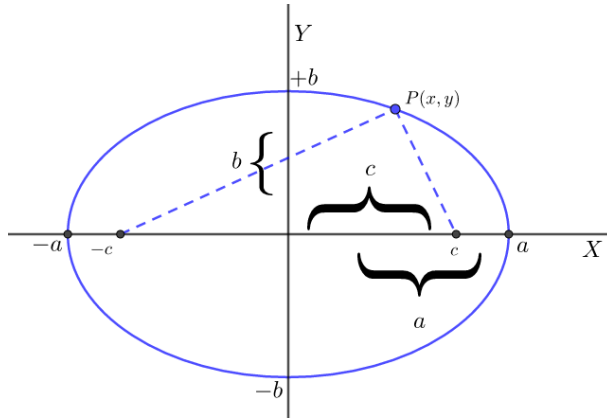


Figura 4.19: Elipse con eje focal sobre OX : semiejes a , b y semidistancia focal c .

De igual forma, si la elipse tiene eje focal sobre Y : $\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$.

EJEMPLO 4.23. Una elipse tiene su centro en el origen y su eje mayor coincide con el eje Y . Uno de los focos es $(0, 3)$ y la excentricidad es

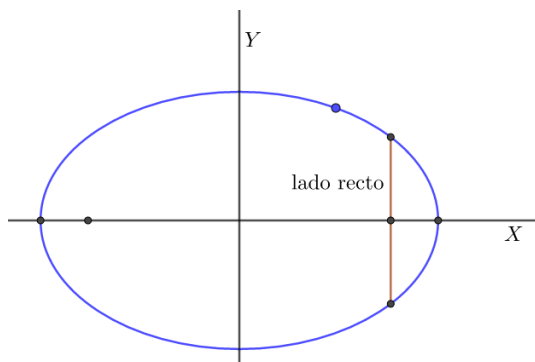
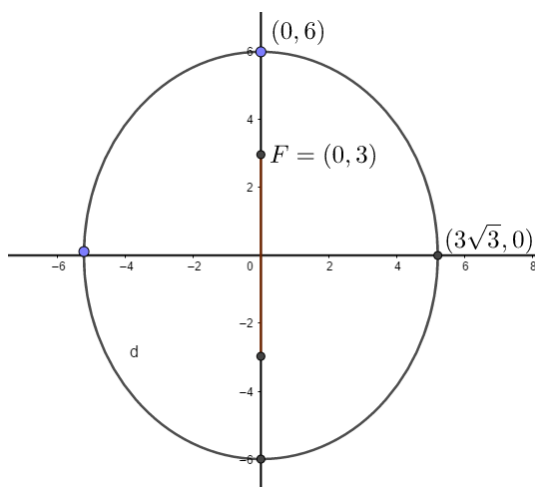


Figura 4.20: Lado recto de la elipse.

$e = \frac{1}{2}$. Hallar el otro foco, los ejes, la ecuación y la longitud de los lados rectos.

Solución. $c = 3$; el otro foco $(0, -3)$. $\frac{1}{2} = \frac{3}{a} \Rightarrow \boxed{a = 6}$. $b^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow b = 3\sqrt{3}$. Eje mayor $2a = 12$, eje menor $2b = 6\sqrt{3}$. Ecuación: $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1$. Lado recto: $\frac{2 \cdot 27}{6} = 9$. $\square$

Figura 4.21: Elipse $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1$.

TEOREMA 4.24. *Elipse con centro en (h, k) . Con eje focal paralelo a X ,*

respectivamente a Y :

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}, \quad \boxed{\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1}.$$

Se cumplen $a^2 = b^2 + c^2$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$ y longitud del lado recto $= \frac{2b^2}{a}$.

TEOREMA 4.25. Si los coeficientes A y C son del mismo signo, la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ es una elipse con ejes paralelos a los ejes coordenados (o un punto, o no es real (imaginario)).

EJEMPLO 4.26. Reducir a su forma ordinaria $x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 6 = 0$.

Solución. $(x+1)^2 - 1 + 4\left[(y-\frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}\right] + 6 = 0$, luego $(x+1)^2 + 4(y-\frac{3}{2})^2 = 4$:

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-3/2)^2}{1} = 1.$$

Centro $C = (-1, 3/2)$, $a = 2$, $V = (1, 3/2)$, $V' = (-3, 3/2)$, $c = \sqrt{3}$, $F = (-1 + \sqrt{3}, 3/2)$, $F' = (-1 - \sqrt{3}, 3/2)$, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\square$

EJEMPLO 4.27. Los vértices de una elipse tienen por coordenadas $(-3, 7)$ y $(-3, -1)$ y la longitud de cada lado recto es 2. Hallar la ecuación, ejes, focos y excentricidad.

Solución. El eje es paralelo a Y (misma abscisa -3). Centro: $C = (-\frac{3-3}{2}, \frac{7-1}{2}) = (-3, 3)$. $2a = d((-3, 7), (-3, -1)) = 8 \Rightarrow a = 4$. $\frac{2b^2}{a} = 2 \Rightarrow b^2 = 4$, $b = 2$, eje menor $= 4$. $c^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$.

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\boxed{\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1}. F = (-3, 3 + 2\sqrt{3}), F' = (-3, 3 - 2\sqrt{3}).$$

$\square$

§4.5 La hipérbola

DEFINICIÓN 4.28. *Hipérbola.* La *hipérbola* es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto

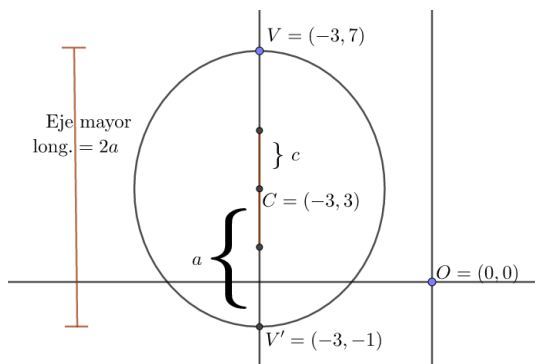


Figura 4.22: Elipse con vértices $(-3, 7)$ y $(-3, -1)$.

de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados *focos*, es siempre igual a una cantidad constante positiva y menor que la distancia entre los focos.

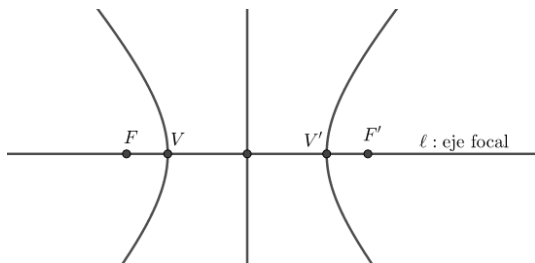


Figura 4.23: La hipérbola: focos F, F' y vértices V, V' sobre el eje focal ℓ .

RECUERDE: Considere el punto $P = (x_1, y_1)$ y la recta $Ax + By + C = 0$. La distancia del punto P a la recta es $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

V, V' =vértices. F, F' =Focos. $\overline{VV'}$ =eje transversal. ℓ' =eje normal. $\overline{AA'}$ =eje conjugado. $\overline{LL'}$ =lado recto. $\overline{DD'}$ =diámetro (variable).

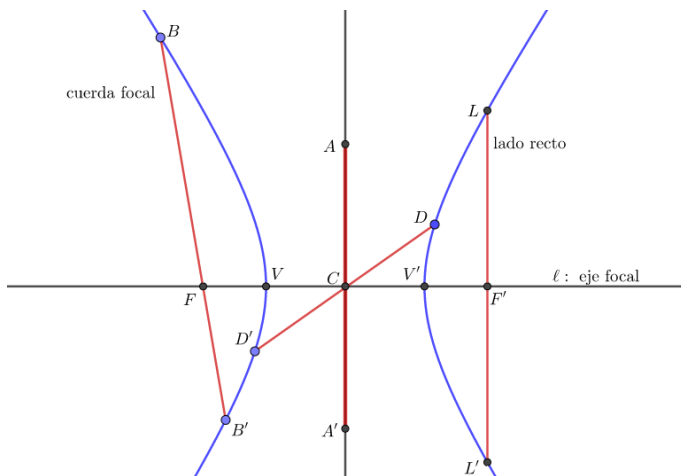


Figura 4.24: Partes de la hipérbola.

$$\begin{aligned}
 & \left| |\overline{FP}| - |\overline{F'P}| \right| = 2a; \quad \boxed{2a < 2c} \\
 \Leftrightarrow & \quad |\overline{FP}| - |\overline{F'P}| = 2a \leftarrow \text{rama izquierda;} \\
 & \quad |\overline{FP}| - |\overline{F'P}| = -2a \leftarrow \text{rama derecha.}
 \end{aligned}$$

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}; \quad |\overline{F'P}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Procediendo como en la elipse (sumando, elevando al cuadrado dos veces) y usando $b^2 = c^2 - a^2$ ($c > a$):

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}.$$

TEOREMA 4.29. La hipérbola de centro en el origen con eje focal X y focos $F = (\pm c, 0)$: $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$. Con eje focal Y y focos $F = (0, \pm c)$:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}.$$

a = semieje transverso, b = semieje conjugado, c = dist. centro-foco,

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}. \text{ Longitud del lado recto } = \frac{2b^2}{a}; \text{ excentricidad } e = \frac{c}{a} =$$

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1.$$

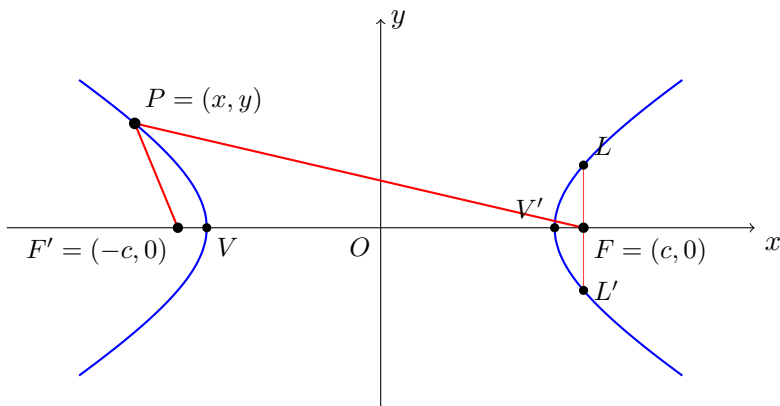


Figura 4.25: Deducción de la ecuación de la hipérbola: $F = (c, 0)$, $F' = (-c, 0)$ y el lado recto $\overline{LL'}$.

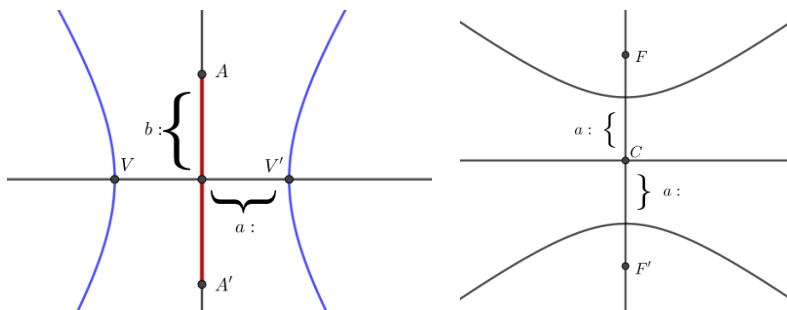


Figura 4.26: Hipérbolas con eje focal sobre OX y sobre OY .

§4.5.1 Asíntotas

De $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ se obtiene $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \rightarrow \pm \frac{b}{a} x$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

Calculamos la distancia de la recta $bx - ya = 0$ a $P_1 = (x_1, y_1) \in H$:

$$d = \frac{|bx_1 - ay_1|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \cdot \frac{|bx_1 + ay_1|}{|bx_1 + ay_1|} = \frac{|b^2x_1^2 - a^2y_1^2|}{\sqrt{b^2 + a^2} |bx_1 + ay_1|}.$$

Como $P_1 \in H$: $b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2$, luego $d = \frac{a^2b^2}{\sqrt{b^2 + a^2} |bx_1 + ay_1|} \rightarrow 0$

cuando $x_1, y_1 \rightarrow \infty$.

Las asíntotas de H son $\boxed{bx - ay = 0}$ y $\boxed{bx + ay = 0}$.

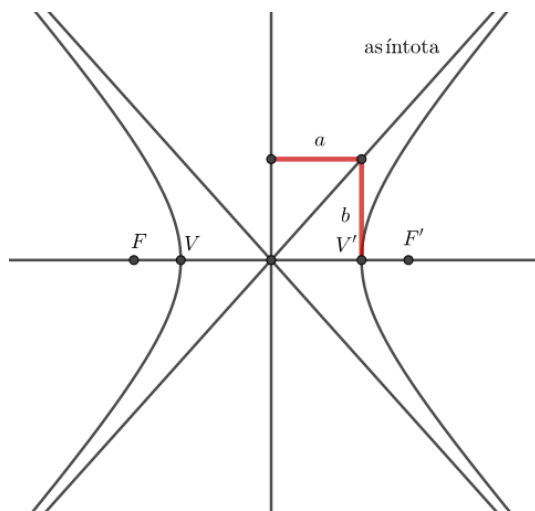


Figura 4.27: Asíntotas de la hipérbola: triángulo de catetos a y b .

TEOREMA 4.30. *Hipérbola con centro $C = (h, k)$:*

$$(a) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1: \text{ asíntotas } bx \pm ay = 0.$$

$$(a') \quad \frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1: \text{ asíntotas } b(x - h) \pm a(y - k) = 0.$$

$$(b) \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1: \text{ asíntotas } by \pm ax = 0.$$

$$(b') \quad \frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1: \text{ asíntotas } b(y - k) \pm a(x - h) = 0.$$

$$\text{Excentricidad } e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1.$$

EJEMPLO 4.31. Los vértices son $V = (0, 3)$, $V' = (0, -3)$ y los focos $F = (0, 5)$, $F' = (0, -5)$. Hallar la ecuación, ejes, e y lados rectos.

$2a = 6 \Rightarrow a = 3$; $2c = 10 \Rightarrow c = 5$; $b^2 = 25 - 9 = 16$, $b = 4$. Eje transversal $2a = 6$; eje conjugado $2b = 8$.

$$\boxed{\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1}, \quad e = \frac{5}{3}, \quad \text{lado recto} = \frac{2 \cdot 16}{3} = \frac{32}{3}. \quad \square$$

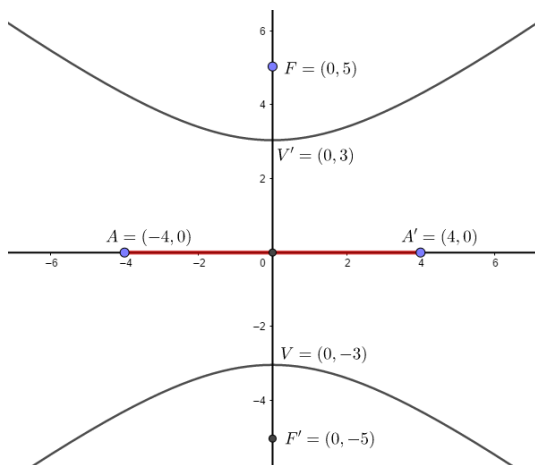


Figura 4.28: Hipérbola $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$.

EJEMPLO 4.32. Discutir $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$.

Completando cuadrados: $9(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 1) = -113 + 81 - 4$, es decir,

$$9(x - 3)^2 - 4(y - 1)^2 = -36 \Rightarrow \frac{(y - 1)^2}{9} - \frac{(x - 3)^2}{4} = 1.$$

El eje focal es paralelo al eje Y .

$C = (3, 1)$, $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{13}$, $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$. Vértices: $V = (3, 4)$, $V' = (3, -2)$. Focos: $F = (3, 1 + \sqrt{13})$, $F' = (3, 1 - \sqrt{13})$. Eje transversal $2a = 6$; eje conjugado $2b = 4$; lado recto $\frac{8}{3}$.

$$2(y - 1) \pm 3(x - 3) = 0 \Rightarrow \boxed{3x + 2y - 11 = 0} \text{ y } \boxed{3x - 2y - 7 = 0}. \quad \square$$

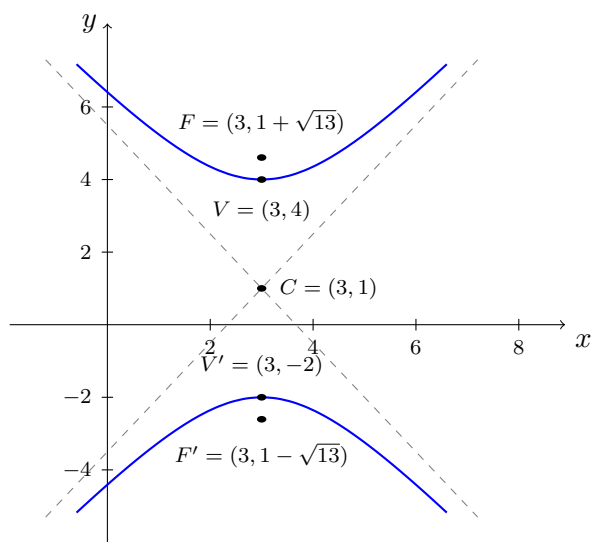


Figura 4.29: Hipérbola $\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{4} = 1$ con sus asíntotas $3x + 2y - 11 = 0$ y $3x - 2y - 7 = 0$.

TRIGONOMETRÍA

§5.1 Razones trigonométricas

Consideremos un ángulo agudo θ y varios triángulos rectángulos semejantes:

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} = \frac{\overline{A_4B_4}}{\overline{OB_4}}.$$

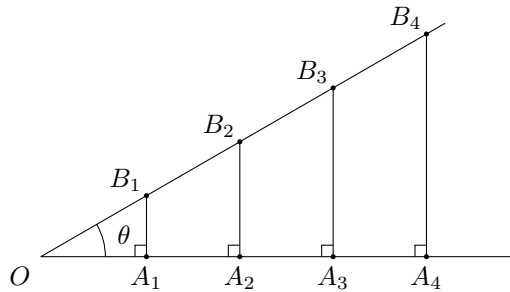


Figura 5.1: Triángulos rectángulos semejantes: las razones no dependen del triángulo elegido.

DEFINICIÓN 5.1.

- Seno del ángulo $\theta = \frac{\text{cateto opuesto a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \text{sen } \theta.$
- Coseno del ángulo $\theta = \frac{\text{cateto adyacente a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \text{cos } \theta.$
- Tangente del ángulo $\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} = \text{tan } \theta.$
- Cotangente del ángulo $\theta = \text{valor recíproco a la tangente} = \text{cot } \theta = \frac{\text{cos } \theta}{\text{sen } \theta}.$

- Secante del ángulo θ = recíproco del coseno = $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$.
- Cosecante del ángulo θ = recíproco del seno = $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$.

EJEMPLO. $\sin 13^\circ = 0,2249510543439 \dots$ (El computador no puede más.) $\cos 13^\circ = 0,9743700647852 \dots$ (El computador no puede más.)

Un ángulo $\theta > 0$ se mide desde el eje X en sentido antihorario; $-\theta$ denota el ángulo medido en sentido horario (ángulo negativo).

En $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

DEFINICIÓN 5.2. Un *radián* es el arco de circunferencia cuya longitud es igual a su radio. “A 360° le corresponden $2\pi \cdot 1$ radianes.” Luego $2\pi(\text{rad}) = 360^\circ \Rightarrow \text{rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57,3^\circ$. En general,

$$\frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{\text{grados}}{\text{radianes}} \Rightarrow \text{radianes} = \frac{2\pi}{360} \cdot \text{grados} = \frac{\pi}{180} \cdot \text{grados}.$$

DEFINICIÓN 5.3. *Funciones trigonométricas.*

1. Función seno: $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x) = y_p$.
2. Función coseno: $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x) = x_p$.
3. Función tangente: $\tan : \text{Dom}(\tan) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{y}{x}$, con $\cos(x) \neq 0$.

EJEMPLO.

$$\textcircled{1} \quad \frac{\pi}{4} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ, \text{ luego } \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\pi}{3} = 60^\circ \text{ y } \frac{\pi}{6} = 30^\circ, \text{ luego } \sin 60^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}.$$

$\textcircled{3}$ En el círculo: $\cos 0 = 1, \quad \cos 2\pi = 1, \quad \cos \pi = -1, \quad \sin \pi = 0$, etc.

$\sin(x) = -\sin(-x)$ Función impar: $F(x) = -F(-x)$ y $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.

$\boxed{\cos(x) = \cos(-x)}$ Función par: $F(x) = F(-x)$ y $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$.

$$\tan(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}; \quad \boxed{\tan(x + \pi) = \tan(x)};$$

$$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$$

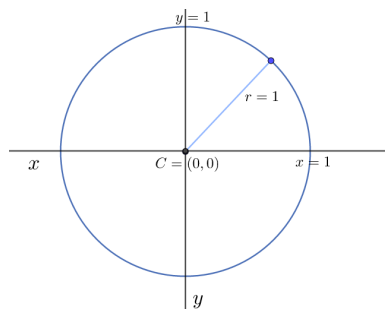


Figura 5.2: La circunferencia unitaria S^1 (círculo goniométrico).

§5.2 Identidad fundamental y fórmulas de adición

IDENTIDAD FUNDAMENTAL.

$$\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1.$$

Demostración. Por el Teorema de Pitágoras: $\text{cat}^2 + \text{cat}^2 = \text{hip}^2$. De la circunferencia unitaria: $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1}$. ■

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA. En la circunferencia unitaria, sean $A = (1, 0)$ y $P = (0, 1)$. El rayo que forma el ángulo θ con el eje X corta a la recta tangente en A (vertical) en un punto T , y a la recta tangente en P (horizontal) en un punto Q . Entonces las funciones trigonométricas se leen como longitudes de segmentos:

$$\tan \theta = \overline{AT}, \quad \cot \theta = \overline{PQ}, \quad \sec \theta = \overline{OT}, \quad \csc \theta = \overline{OQ}.$$

EJEMPLOS.

① Demuestre que $\tan^2(t) + 1 = \sec^2(t)$.

Demostración. Como $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, dividiendo por $\cos^2 t$: $\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + 1 = \frac{1}{\cos^2 t} \Rightarrow \tan^2 t + 1 = \sec^2 t$. ■

② Demuestre que $1 + \cot^2 t = \csc^2 t$.

Demostración. Dada la igualdad fundamental, dividimos por $\sin^2 t$. ■

TEOREMA 5.4. Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$.

Demostración. Consideremos la siguiente figura en la circunferencia unitaria:

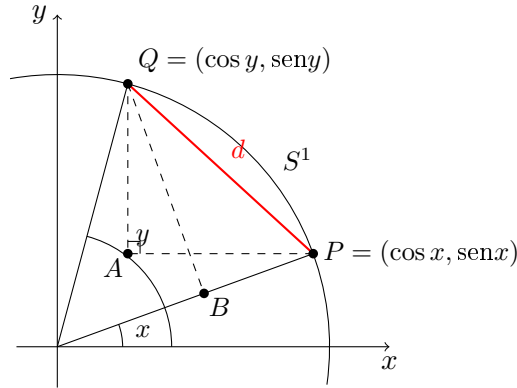


Figura 5.3: Los triángulos rectángulos $\triangle PAQ$ y $\triangle PBQ$; B es el pie de la perpendicular desde Q a la recta OP .

- $\triangle PAQ$ es rectángulo. $\triangle PBQ$ es rectángulo.
- $\overline{PA} = |\cos(x) - \cos(y)|$; $\overline{AQ} = |\sin(y) - \sin(x)|$; d = hipotenusa.

Por Pitágoras:

$$d^2 = (\sin(y) - \sin(x))^2 + (\cos(x) - \cos(y))^2. \quad (5.1)$$

Por otro lado, $\cos(y - x) = \overline{OB}$, luego $\overline{PB} = |1 - \cos(y - x)|$ y $\overline{BQ} = |\sin(y - x)|$:

$$d^2 = (1 - \cos(y - x))^2 + \sin^2(y - x). \quad (5.2)$$

Igualando (5.1) y (5.2):

$$\begin{aligned} & \sin^2 y - 2\sin y \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x - 2\cos x \cos y + \cos^2 y \\ &= 1 - 2\cos(y - x) + \underbrace{\cos^2(y - x) + \sin^2(y - x)}_{=1} \\ &\Rightarrow 2 - 2(\sin y \sin x + \cos x \cos y) = 2 - 2\cos(y - x) \\ &\Rightarrow \boxed{\cos(y - x) = \cos y \cos x + \sin y \sin x}. \quad \square \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 5.5. $\boxed{\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha}.$

Demostración. +:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta. \quad \square \end{aligned}$$

Usamos: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \beta + \sin \frac{\pi}{2} \sin \beta = \sin \beta$, de donde también $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$.

PROPOSICIÓN 5.6. $\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}.$

Demostración.

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

■

PROPOSICIÓN 5.7. $\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}.$

Demostración. $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$

■

PROPOSICIÓN 5.8. $\boxed{\sin(2\alpha) = 2\sin \alpha \cos \alpha}.$

Demostración. $\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha.$ ■

EJERCICIO. Demostrar que $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$

Solución. $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2}$, luego $\sin \frac{\alpha}{2}(1 + \cos \alpha) = \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2}$, de donde $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$ □

§5.3 Ley de senos y ley de cosenos

Consideremos un triángulo cualquiera de vértices A, B, C , con lados a, b, c opuestos a los ángulos α, β, γ , respectivamente.

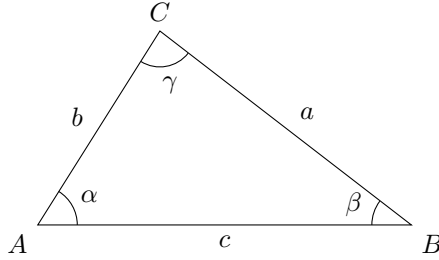


Figura 5.4: Un triángulo cualquiera.

TEOREMA 5.9.

$$(i) \quad \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}}_{(ii)}$$

$$\boxed{\text{Ley de los cosenos}} \Leftrightarrow \boxed{\text{Teorema del seno}}$$

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii).$ Sea $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha =$

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ luego}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2 \\ &= \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} = \frac{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} \\ &= \frac{[2bc - (b^2 + c^2 - a^2)][2bc + (b^2 + c^2 - a^2)]}{4b^2c^2} \\ &= \frac{-[(b^2 - 2bc + c^2) - a^2][(b^2 + 2bc + c^2) - a^2]}{4b^2c^2} \\ &= \frac{-(b - c)^2 - a^2][(b + c)^2 - a^2]}{4b^2c^2} \\ &= \frac{-(b - c + a)(b - c - a)(b + c - a)(b + c + a)}{4b^2c^2} \\ &= \frac{(b - c + a)(a + c - b)(b + c - a)(b + c + a)}{4b^2c^2}. \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\sin^2 \beta = \frac{(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}{4a^2c^2}. \quad \textcircled{2}$$

De ① y ②: $b^2 \sin^2 \alpha = a^2 \sin^2 \beta$ ($\sin \alpha, \sin \beta \geq 0$ pues es triángulo), luego

$$\boxed{\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b}}.$$

■

EJEMPLO 5.10. Suponga que a Andrés y Claudia los separa un río y Andrés cruzará el río a través de una cuerda, para llegar a Claudia. Para esto debe saber cuánto mide la cuerda. Suponiendo que Andrés tiene un grafómetro, ayude a Andrés.

Solución. A = Andrés, C = Claudia; elijamos otro punto B del lado de Andrés.

Con el grafómetro conocemos α y β . Por el Teorema de los senos:

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \beta} = \frac{\overline{AB}}{\sin \gamma} \Rightarrow \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma},$$

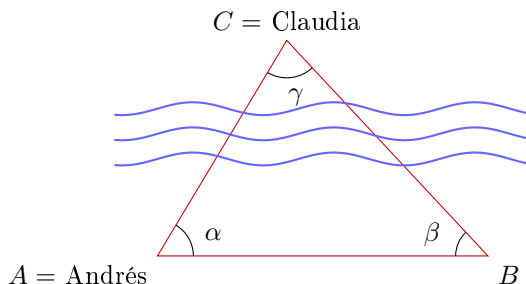


Figura 5.5: Andrés y Claudia separados por el río; B es un punto del lado de Andrés.

donde $\overline{AB}$, α y β son conocidos. Por otro lado, $\gamma + \alpha + \beta = \pi \Rightarrow \gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, luego

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \gamma &= \operatorname{sen}[\pi - (\alpha + \beta)] = \underbrace{\operatorname{sen} \pi}_{=0} \cdot \cos(\alpha + \beta) - \underbrace{\cos \pi}_{=-1} \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \\ &= \operatorname{sen}(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\boxed{\overline{AC} = \frac{\overline{AB} \cdot \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}}.$

§5.4 Ejercicios

Demuestre las siguientes identidades:

1. $\cos(2\alpha) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$.
2. $\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$.
3. $\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$. Esta identidad sirve para calcular $\operatorname{sen}(15^\circ)$, usando $\alpha = 30^\circ$ y $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\operatorname{sen}(15^\circ) = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

4. $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$.
5. $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Stewart, J. *Cálculo*. Cengage Learning.
- [2] Bravo, R. *Fundamentos de los sistemas numéricos*. Holt, Rinehart and Winston, 1971.
- [3] Suppes, P. *Introduction to Logic*. Van Nostrand, 1957.
- [4] Lehmann, C. *Geometría Analítica*. Limusa.
- [5] Derrick, W. *Variable Compleja con Aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica, 1987.
- [6] Hefez, A. *Curso de Álgebra I*. IMPA, 2013.
- [7] Loomis, L.H. y Sternberg, S. *Advanced Calculus*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1968.
- [8] Mares, E.D. *Relevant Logic*. Cambridge University Press, 2004.